МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

Т. В. Авдєєва, В. М. Шраменко

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА В ЗАДАЧАХ ТА ПРИКЛАДАХ

Збірник задач

для студентів I курсу ФМФ НТУУ "КПІ"

КИЇВ 2016

УДК 512(075.8)
Лінійна алгебра в задачах та прикладах. Збірник задач для студентів I курсу ФМФ НТУУ "КПІ"/Т. В. Авдєєва, В. М. Шраменко. - Київ, НТУУ "КПІ", 2016. -206 с.

Збірник містить задачі, які необхідні для оволодіння курсом лінійної алгебри, що читається студентам фізико-математичного факультету НТУУ "КПІ". Окрім задач в збірнику розміщено основні теоретичні відомості та приклади розв'язування задач. Збірник буде корисним не тільки для студентів фізико-математичного факультету, але й для студентів інших спеціальностей, де курс лінійної алгебри виділено в окрему дисципліну.

Друкується за рішенням Вченої ради фізико-математичного факультету НТУУ "КПІ"(протокол № 4 від 27 квітня 2016 р.)

Укладачі:
Т. В. Авдєєва, ст.викладач каф. математичної фізики ФМФ НТУУ "КПІ";
В. М. Шраменко, кандидата фіз.-мат. наук, доц. каф. математичної фізики ФМФ НТУУ "КПІ".

Рецензенти:
Ганюшкін Олександр Григорович,
кандидат фіз.-мат. наук,
доцент кафедри алгебри і математичної логіки
Київського університету ім. Тараса Шевченка

Рибачук Людмила Віталіївна,
кандидата фіз.-мат. наук,
доцента кафедри вищої та обчислювальної математики НАУ

Відповідальний редактор:
Вірченко Н.О.,
доктор фіз.-мат. наук,
професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей
ФМФ НТУУ "КПІ",

ЗМІСТ

1. Вступ

Лінійна алгебра є однією з фундаментальних дисциплін, що викладаються на першому курсі фізико-математичного факультету. Такі поняття, як лінійний простір, лінійний оператор, а також скалярний добуток та норма стають основою, для подальшого вивчення курсів математичного та функціонального аналізу, теорії диференціальних рівнянь та математичної фізики. На відміну від математичного аналізу та аналітичної геометрії, де студенти мають справу з цілком реальними об'єктами: послідовностями та функціями, геометричними векторами та кривими 2-го порядку, в лінійній алгебрі вони зустрічаються із зовсім новим рівнем абстракції.

До цього моменту студенти уявляли собі простір лише як точки в декартовій системі координат, а тут елементами (точками) простору можуть бути функції, матриці, многочлени і т.д. На це ще накладається узагальнення поняття функції (оператор), що ставить у відповідність не лише число іншому числу, а елементу лінійного простору довільної природи елемент цього ж або іншого лінійного простору.

Паралельно з лінійною алгеброю на першому курсі вивчають аналітичну геометрію і там вводять поняття скалярного добутку. Виявляється, що введений досить дивним чином добуток векторів насправді є принципово важливим. Особливе значення має ортогональність двох ненульових векторів, що є еквівалентним рівності нулю їх скалярного добутку. В лінійній алгебрі "геометризація"лінійного простору відбувається за допомогою введення абстрактної бінарної операції (скалярного добутку) на елементах простору, яка має ті самі властивості, що й введений в геометрії скалярний добуток.

Отже, основною проблемою при засвоєнні студентами лінійної алгебри є надто велика абстрактність введених конструкцій, тому головною метою нашого задачника є ретельне опрацювання теоретичного матеріалу. Матеріал задачника дозволяє повноцінно розглянути такі питання: комплексні числа, матриці, визначники, системи лінійних рівнянь, лінійні простори, лінійні оператори, жорданова форма матриці оператора, скалярний добуток, ортогоналізація системи векторів, матриця Грама, проекція вектора на підпростір, спряжений оператор, квадратичні та білінійні форми, функції від матриць, а також багато питань з теорії многочленів.

Ми рекомендуємо використовувати збірник задач у якості збірника типових розрахунків для студентів фізико-математичного факультету та спеціальностей, де лінійну алгебру вивчають як окрему дисципліну. При стандартному розмірі студентських груп 15 - 18 чоловік, залишаються варіанти, які можна опрацювати на практичних заняттях.

2. Комплексні числа та операції над ними

2.1. **Арифметичні операції з комплексними числами, дійсна та уявна частини комплексного числа.** Запишіть комплексне число z у алгебричній формі, знайдіть дійсну та уявну частини даного комлексного числа, модуль цього комплексного числа

1) $z = \frac{2-6i}{1-i} + (1+i)^4 - i^7.$
2) $z = \frac{5+15i}{2i-1} + (1-i)^5 + i^9.$
3) $z = \frac{5+10i}{-1-2i} + (1+2i)^3 - 3i^{13}.$
4) $z = \frac{10+20i}{1+3i} + (2-i)^4 + i^{11}.$
5) $z = \frac{10i-20}{3i-1} - (2+3i)^3 + i^{14}.$
6) $z = \frac{13-26i}{3i-2} + (2+i)^3 + 3i^9.$
7) $z = \frac{13i-26}{2+3i} + 2(1+i)^5 - i^{10}.$
8) $z = \frac{4+10i}{1-i} + (1+3i)^3 + 4i^7.$
9) $z = \frac{6-2i}{1+i} + (3+i)^3 - 4i^9.$
10) $z = \frac{2+8i}{i-1} + (2+2i)^4 - 3i^{15}.$
11) $z = \frac{4+10i}{i-1} + (3+2i)^3 + i^{17}.$
12) $z = \frac{2-12i}{i-1} - \frac{2+3i}{i^{15}}.$
13) $z = \frac{4-2i}{i+1} + 2 - i^3 + i^{19}.$
14) $z = \frac{2-6i}{1+i} + (2+i)^4 - i^{23}.$
15) $z = \frac{15-5i}{2i-1} - (3+i)^3 - 2i^7.$
16) $z = \frac{5i-10}{1+2i} + (2i-3)^4 - 3i^{11}.$
17) $z = \frac{5i+20}{1-2i} - (3+i)^5 + 4i^{19}.$
18) $z = \frac{20-15i}{2-i} + (3i-2)^2 - 2i^{13}.$
19) $z = \frac{5-20i}{2+i} - (2+2i)^4 + i^{25}.$
20) $z = \frac{35i+5}{i-2} + (3-3i)^3 - i^{27}.$
21) $z = \frac{10-30i}{3i+1} + (1+i)^6 + i^{99}.$
22) $z = \frac{70-20i}{1-3i} - (3-2i)^3 + i^{101}.$
23) $z = \frac{30+10i}{3i+1} - 2(3-i)^3 - i^{103}.$
24) $z = \frac{16i+24}{2i-2} + (2i+4)^3 - i^{107}.$
25) $z = \frac{26}{5i-1} + (1-i)^6 + i^{17}.$
26) $z = \frac{13+26i}{3i-2} + (1-i)^4 - i^{14}.$
27) $z = \frac{8+16i}{i-1} - (i-3)^4 + i^{18}.$
28) $z = \frac{3i-1}{1+i} + (1+3i)^4 - i^{21}.$
29) $z = \frac{7i-1}{i-1} - (2+2i)^4 + i^{27}.$
30) $z = \frac{5i+1}{1+i} + (3+3i)^4 - i^{97}.$

2.2. **Тригонометрична форма комплексного числа, модуль та аргумент. Формула Муавра.** Подайте число у тригонометричній формі, вкажіть модуль та агрумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа z.

1) $z = 5 + 5i\sqrt{3}, \quad n = 15.$
2) $z = 4 + 4i, \quad n = 43.$
3) $z = \sqrt{3} + i, \quad n = 16.$
4) $z = 2i - 2\sqrt{3}, \quad n = 42.$
5) $z = 3i, \quad n = 17.$
6) $z = 3 - 3i\sqrt{3}, \quad n = 41.$
7) $z = -2, \quad n = 18.$
8) $z = -4 - 4i\sqrt{3}, \quad n = 40.$
9) $z = 2 - 2i, \quad n = 19.$
10) $z = -5 + 5i\sqrt{3}, \quad n = 39.$
11) $z = \sqrt{3} + 3i, \quad n = 20.$
12) $z = 3 + 3i, \quad n = 38.$
13) $z = 5i, \quad n = 21.$
14) $z = -3, \quad n = 37.$
15) $z = -3 + 3i, \quad n = 22.$
16) $z = 2\sqrt{3} + 6i, \quad n = 36.$
17) $z = -2 + 2i, \quad n = 23.$
18) $z = 7i, \quad n = 35.$
19) $z = 5\sqrt{3} + 15i, \quad n = 24.$
20) $z = -1 - i, \quad n = 34.$
21) $z = 6 - 2i\sqrt{3}, \quad n = 25.$
22) $z = -4 + 4i, \quad n = 33.$
23) $z = -2i, \quad n = 26.$
24) $z = 2i\sqrt{3} - 2, \quad n = 32.$
25) $z = -1 + i\sqrt{3}, \quad n = 27.$
26) $z = 7 - 7i, \quad n = 31.$
27) $z = -4i, \quad n = 28.$
28) $z = i - \sqrt{3}, \quad n = 14.$
29) $z = 10 + 10i\sqrt{3}, \quad n = 29.$
30) $z = -3 - i\sqrt{3}, \quad n = 13.$

2.3. **Корінь n-го степеня з комплексного числа.** Знайдіть всі значення $\sqrt[n]{z}$ та зобразіть всі ці значення на комплексній площині

1) $\sqrt[5]{3i}$;
2) $\sqrt[6]{3}$;
3) $\sqrt[5]{2i+2}$;
4) $\sqrt[5]{\sqrt{3}-3i}$;
5) $\sqrt[5]{6+2i\sqrt{3}}$;
6) $\sqrt[6]{2i}$;
7) $\sqrt[6]{6}$;
8) $\sqrt[4]{3i-3}$;
9) $\sqrt[4]{-3+i\sqrt{3}}$;
10) $\sqrt[5]{3-i\sqrt{3}}$;
11) $\sqrt[6]{2\sqrt{3}-6i}$;
12) $\sqrt[6]{-i\sqrt{3}-1}$;

13) $\sqrt[6]{-4i}$;

14) $\sqrt[5]{-3}$;

15) $\sqrt[4]{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$;

16) $\sqrt[6]{4-4i}$;

17) $\sqrt[5]{\sqrt{3}-i}$;

18) $\sqrt[6]{-\sqrt{3}-3i}$;

19) $\sqrt[5]{-3-i\sqrt{3}}$;

20) $\sqrt[5]{-3i}$;

21) $\sqrt[5]{-4}$;

22) $\sqrt[6]{4+4i}$;

23) $\sqrt[6]{-2-2i}$;

24) $\sqrt[6]{-6+2i\sqrt{3}}$;

25) $\sqrt[4]{-4\sqrt{3}+4i}$;

26) $\sqrt[4]{i}$;

27) $\sqrt[5]{-2}$;

28) $\sqrt[6]{2i-2}$;

29) $\sqrt[6]{-i-1}$;

30) $\sqrt[5]{1-i}$.

2.4. **Зображення області на комплексній площині.** На комплексній площині зобразіть область, що задовольняє умови

1) $|z-3-2i| \le 3, \;\; 3 \le |z-6+i|$;
2) $|z-1-3i| \le 4, \;\; -1 \le \mathrm{Re}z < 4, \;\; \mathrm{Im}z \le 5$;
3) $|z+1+2i| \le 3, \; 2 \le \mathrm{Re}z, \;\; \mathrm{Im}z \le 5$;
4) $|z+2-3i| > 2, \;\; 1 \le \mathrm{Im}z \le 6$;
5) $-1 \le \mathrm{Re}z \le 4, \;\; -3 \le \mathrm{Im}z, \;\; -\pi/3 \le \arg z < \pi/2$;
6) $|z-4-2i| \le 6, \;\; 1 \le |z-7-4i|$;
7) $|z-3+i| \le 4, \;\; 1 \le \mathrm{Re}z, \;\; -3 < \mathrm{Im}z$;
8) $\mathrm{Re}z \le 4, \;\; \mathrm{Im}z \le 2, \; -\pi/4 \le \arg z \le \pi/3$;
9) $|z-5-2i| \le 4, \;\; |z-2+2i| \le 5$;
10) $|z-4+i| > 2, \;\; -1 \le \mathrm{Re}z, \;\; -4 \le \mathrm{Im}z$;
11) $|z-4-i| \le 2, \;\; 3 \le \mathrm{Re}z, \;\; 0 \le \mathrm{Im}z$;
12) $|z+4+i| > 3, \;\; -\pi/2 \le \arg(z+4-i) \le 2\pi/3$;
13) $|z+2-i| <\le 4, \;\; 3 \le |z-3+i|$;
14) $|z+1-2i| \le 6, \;\; -4 \le \mathrm{Re}z \le 3, \;\; -1 < \mathrm{Im}z$;
15) $|z+2-i| \ge 3, \;\; -4 \le \mathrm{Re}z \le -1$;
16) $|z-3-i| > 3, \;\; \mathrm{Im}z \ge -1$;
17) $|z-3-2i| \ge 1, \;\; \mathrm{Re}z \ge 2, \;\; -1 \le \mathrm{Im}z$;
18) $2 \le \mathrm{Re}z, \;\; -2 \le \mathrm{Im}z, \; -\pi/6 \le \arg z < \pi/4$;
19) $-3 \le \mathrm{Im}z \le 2, \; -\pi/4 < \arg(z+1) \le \pi/3$;
20) $|z-4+i| \le 3, \;\; -\pi/4 \le \arg(z-3) \le \pi/3$;
21) $|z-2-2i| \ge 3, \;\; 1 \le |z+3+2i|$;

22) $|z-3-i| \le 6, \quad 2 \le |z-5|, \quad |z| \ge 1;$

23) $-1 \le \mathrm{Re} z \le 3, \quad 2 \le \mathrm{Im} z;$

24) $-2 \le \mathrm{Re} z, \quad -2\pi/3 \le \arg z \le 5\pi/6;$

25) $|z-1| \le 3, \quad \mathrm{Re} z \le 2, \quad \mathrm{Im} z \le 1;$

26) $|z+2-2i| \ge 3, \quad \mathrm{Re} z \le 2, \quad 1 \le \mathrm{Im} z;$

27) $|z-2+2i| \ge 1, \quad 0 \le \mathrm{Re} z, \quad -2 \le \mathrm{Im} z;$

28) $|z-2+2i| \le 4, \quad 0 \le \mathrm{Re} z, \quad \mathrm{Im} z \le -2;$

29) $\mathrm{Im} z \le 3, \ \pi/6 \le \arg z \le 2\pi/3;$

30) $\mathrm{Re} z \le 4, \quad -\pi/4 \le \arg z \le \pi/6.$

2.5. **Розв'язування рівнянь над полем комплексних чисел.** Розв'яжіть рівняння:

1) $z^4+13z^2+36=0;$

2) $z^4+5z^2+4=0;$

3) $z^4-3z^2-4=0;$

4) $z^4+3z^2-4=0;$

5) $z^4-5z^2-36=0;$

6) $z^4+10z^2+9=0;$

7) $z^4-8z^2-9=0;$

8) $z^4-2z^2+25=0;$

9) $z^4+5z^2+9=0;$

10) $z^4+5z^2+16=0;$

11) $z^4+3z^2+9=0;$

12) $z^4+z^2+16=0;$

13) $z^4+6z^2+25=0;$

14) $z^4+2z^2+49=0;$

15) $z^4-2z^2+81=0;$

16) $z^4+5z^2+100=0;$

17) $z^4+9z^2+64=0;$

18) $z^4+20z^2+64=0;$

19) $z^4-7z^2+64=0;$

20) $z^4-12z^2+64=0;$

21) $z^4+19z^2+9=0;$

22) $z^4-2z^2+9=0;$

23) $z^4-4z^2+16=0;$

24) $z^4-z^2+25=0;$

25) $z^4-5z^2+49=0;$

26) $z^4+7z^2+81=0;$

27) $z^4+18z^2+81=0;$

28) $z^4-2z^2+100=0;$

29) $z^4+16z^2+100=0;$

30) $z^4+31z^2+81=0.$

3. Матриці

3.1. **Дії над матрицями.** Знайдіть значення вказаного матричного виразу

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^T B - B^T A.$

2) $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ 7 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \end{pmatrix}; \quad AB - BA.$

3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$; $(AB)^T - B^T A^T$.

4) $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $(A+B)(B-A)+A^2-B^2$.

5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; $AB - BA$.

6) $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$; $A^T B - B^T A$.

7) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; $(AB)^T - B^T A^T$.

8) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $(A+B)(B-A)+A^2-B^2$.

9) $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -7 \\ 1 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$; $AB - BA$.

10) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -3 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $A^T B - B^T A$.

11) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$; $(AB)^T - B^T A^T$.

12) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $(A+B)(B-A)+A^2-B^2$.

13) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \\ 8 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $AB - BA$.

14) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; $A^T B - B^T A$.

15) $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $(AB)^T - B^T A^T$.

16) $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $(A+B)(B-A)+A^2-B^2$.

17) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; $AB - BA$.

18) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -7 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $A^T B - B^T A$.

19) $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $(AB)^T - B^T A^T$.

20) $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 1 & 9 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$; $(A+B)(B-A)+A^2-B^2$.

21) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 2 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $AB - BA$.

22) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$; $A^T B - B^T A$.

23) $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $(AB)^T - B^T A^T$.

24) $A = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $(A+B)(B-A)+A^2-B^2$.

25) $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -7 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $BA - AB$.

26) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; $A^T B - B^T A$.

27) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 8 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $(AB)^T - B^T A^T$.

28) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $(A+B)(B-A)+A^2-B^2$.

29) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 7 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $AB - BA$.

30) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $(AB)^T - B^T A^T$.

3.2. **Елементарні матричні рівняння.** Розв'яжіть рівняння

1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

2) $3 \cdot X + \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

3) $3 \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$.

4) $2 \cdot X + \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$.

5) $2 \cdot X - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

6) $X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

7) $2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} - 3 \cdot X = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

8) $3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$.

9) $4 \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$.

10) $4 \cdot X - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

11) $2 \cdot X + 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$.

12) $X - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

13) $2 \cdot X + 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

14) $5 \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

15) $3 \cdot X + 2 \cdot \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

16) $3 \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

17) $2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

18) $5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$.

19) $2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

20) $4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} - 3 \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$.

21) $3 \cdot X + 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

22) $3 \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$.

23) $5 \cdot X - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$.

24) $\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} + 4 \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$.

25) $2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 3 \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$.

26) $4 \cdot X - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

27) $3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$.

28) $7 \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$.

29) $3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 5 \cdot X = \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$

30) $5 \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$

3.3. **Многочлени від матриць.** Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A

1) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 4,\ \ A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

2) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 3,\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

3) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 1,\ \ A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$

4) $f(x) = -x^4 + 3x^3 + x + 2,\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$

5) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 + 2,\ \ A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$

6) $f(x) = 7x^3 + 2x^2 - 3x + 5,\ \ A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$

7) $f(x) = -3x^4 + x^2 - 5x + 1,\ \ A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$

8) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x + 7,\ \ A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$

9) $f(x) = 3x^4 - x^3 - 3x^2 + 4x - 1,\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$

10) $f(x) = x^4 - x^3 - 3x - 3,\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$

11) $f(x) = -4x^4 + x^2 - 5x + 3,\ \ A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}.$

12) $f(x) = 7x^3 + 2x^2 - 3x - 2,\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$

13) $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x - 3,\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$

14) $f(x) = 3x^4 + x^3 - x + 1,\ \ A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$

15) $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 5,\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$

16) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 2,\ \ A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

17) $f(x) = 2x^4 + x^3 - 4x + 1,\ \ A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}.$

18) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 1,\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$

19) $f(x) = x^4 + x^3 - x + 6,\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$

20) $f(x) = 3x^4 + 3x^3 - 3x - 4,\ \ A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$

21) $f(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1,\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$

22) $f(x) = x^4 - x^2 + 5x + 2,\ \ A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

23) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 4,\ \ A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$

24) $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 3,\ \ A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

25) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 3x + 7,\ \ A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

26) $f(x) = -x^4 - x^3 + 3x + 4,\ \ A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

27) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x + 1,\ \ A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

28) $f(x) = 2x^4 - x^2 + x + 5,\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

29) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 9,\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

30) $f(x) = 5x^4 - x^3 + 3x - 4,\ \ A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3.4. **Різні задачі.** Використовуючи елементарні властивості матриць, знайдіть відповіді на такі питання:

1) За якої умови на матриці A та B буде мати місце рівність

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \ ?$$

2) Знайдіть усі матриці B, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, тобто $AB = BA$.

3) Знайдіть усі матриці X, що задовольняють рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 30 & 33 \end{pmatrix}.$$

4) Знайдіть усі матриці порядку 2, для яких $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}(E - A)$.

5) Знайдіть усі матриці X, що задовольняють рівняння

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 2 & 24 \end{pmatrix}.$$

6) Знайдіть усі матриці B, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, тобто $AB = BA$.

7) Знайдіть усі матриці X, що задовольняють рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 2 & 24 \end{pmatrix}.$$

8) Наведіть приклад матриці порядку 2, яка відмінна від E і O, для якої $A^2 = A$.

9) Знайдіть усі матриці X, що задовольняють рівняння

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 12 & -21 \\ 16 & -28 \end{pmatrix}.$$

10) За якої умови на A та B має місце $(AB)^T = A^T B^T$.

11) Знайдіть усі матриці X, що задовольняють рівнянню

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 18 & 45 \end{pmatrix}.$$

12) Доведіть, що $\mathrm{tr} AB = \mathrm{tr} BA$.

13) Знайдіть усі матриці B, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, тобто $AB = BA$.

14) Наведіть приклад матриці порядку 2, яка відмінна від E і O та задовольняє умову $AA^T = E$.

15) Знайдіть усі матриці X, що задовольняють рівняння

$$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 56 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

16) Знайдіть усі матриці B, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, тобто $AB = BA$.

17) За якої умови на матриці A та B має місце рівність

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2.$$

18) Відомо, що навіть для квадратних матриць AB не обов'язково дорівнює BA. Поясніть, чому квадратні матриці A та A^3 комутують.

19) Знайдіть усі матриці X, що задовольняють рівнянню

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 18 & 45 \end{pmatrix}.$$

20) Знайдіть усі матриці B, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$, тобто $AB = BA$.

21) Знайти усі матриці порядку 2, для яких $A^2 = E$.

22) Знайдіть усі матриці B, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, тобто $AB = BA$.

23) Знайдіть усі матриці X, що задовольняють рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -7 & 14 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -10 & -12 \\ 35 & 42 \end{pmatrix}.$$

24) Наведіть приклад матриці порядку 2, що не є одиничною або нульовою для якої $A^3 = A$.

25) За якої умови на елементи матриці A має місце рівність $A^T = A$.

26) Знайдіть усі матриці B, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, тобто $AB = BA$.

27) Знайдіть усі матриці X, що задовольняють рівнянняю

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

28) Наведіть приклад матриць порядку 2×3, що не є нульовими, але для яких $AB = 0$.

29) Наведіть приклад комутуючих матриць порядку 3, що не є нульовими або одиничними матрицями.

30) Знайдіть усі матриці B, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Визначники

4.1. **Обчислення визначників.** Обчисліть визначники четвертого порядку:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 7 & -3 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} -7 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$;

8) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$;

9) $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$;

10) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ -7 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

11) $\begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$;

12) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$;

13) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; 19) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; 25) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

14) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$; 20) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; 26) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

15) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; 21) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; 27) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

16) $\begin{vmatrix} 6 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; 22) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; 28) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

17) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$; 23) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; 29) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

18) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. 24) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; 30) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

4.2. **Рівняння та нерівності із визначниками.** Розв'яжіть рівняння або нерівність:

1) $\begin{vmatrix} 3x-1 & 1 \\ x+1 & x \end{vmatrix} = 0;$

2) $\begin{vmatrix} 1-x & 4 \\ 2-x & x \end{vmatrix} \le -4;$

3) $\begin{vmatrix} 2+3x & x+6 \\ 2 & x \end{vmatrix} > 0;$

4) $\begin{vmatrix} 2x^2-3 & x+2 \\ x & 1 \end{vmatrix} = 0;$

5) $\begin{vmatrix} x+1 & 4x \\ 2 & x-3 \end{vmatrix} \ge 8;$

6) $\begin{vmatrix} 2x-1 & x-2 \\ 3 & x \end{vmatrix} \le 12;$

7) $\begin{vmatrix} x+1 & 2x \\ 3 & x-2 \end{vmatrix} < 12-2x;$

8) $\begin{vmatrix} x+3 & x \\ 9 & 2x-1 \end{vmatrix} < 3;$

9) $\begin{vmatrix} 2x+3 & x-1 \\ 4 & x \end{vmatrix} < 7;$

10) $\begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 4 & 2x \end{vmatrix} \le 16;$

11) $\begin{vmatrix} 2x-1 & 9 \\ x & x+3 \end{vmatrix} > -3;$

12) $\begin{vmatrix} x+5 & x \\ 2 & x-1 \end{vmatrix} \ge -2;$

13) $\begin{vmatrix} 2x-3 & x+1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} < x^2-16;$

14) $\begin{vmatrix} x-1 & 2x \\ x+2 & x+3 \end{vmatrix} \le -3;$

15) $\begin{vmatrix} 3x-2 & 4x \\ 2 & x+1 \end{vmatrix} > -6;$

16) $\begin{vmatrix} x^2+1 & x+2 \\ 1-x & -2 \end{vmatrix} < -4;$

17) $\begin{vmatrix} x-x^2 & 3x \\ -5 & 2 \end{vmatrix} \ge 13x;$

18) $\begin{vmatrix} x & 4 \\ x-2 & x+3 \end{vmatrix} \le 8-7x;$

19) $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2x-3 & x^2+3 \end{vmatrix} < 69;$

20) $\begin{vmatrix} 1-x & 3x \\ 2 & 2x-1 \end{vmatrix} < -6;$

21) $\begin{vmatrix} x-2 & x+1 \\ 3 & x \end{vmatrix} < 3;$

22) $\begin{vmatrix} 2x & x+3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} < x^2-9;$

23) $\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 4x^2 & 2x-1 \end{vmatrix} < 11x^2-40;$

24) $\begin{vmatrix} 5x+1 & 3x \\ 2-x & x \end{vmatrix} > 9x^2;$

25) $\begin{vmatrix} 2x+1 & 4 \\ 2+x & 1-3x \end{vmatrix} > -16-6x^2;$ 28) $\begin{vmatrix} 4x-1 & x+1 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 5;$

26) $\begin{vmatrix} 3x & 2+x \\ x-4 & -x \end{vmatrix} = -2x;$ 29) $\begin{vmatrix} 2x+5 & 3x \\ -2 & x-1 \end{vmatrix} < x-5;$

27) $\begin{vmatrix} 3x+1 & x-2 \\ 5-x & 2 \end{vmatrix} > 24;$ 30) $\begin{vmatrix} x+3 & 3 \\ 1-x & 2x-1 \end{vmatrix} > 4.$

5. Обернена матриця

5.1. **Знаходження оберненої матриці.** Обчисліть обернену матрицю A^{-1} для наведених матриць A. Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix};$ 6) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix};$ 11) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix};$

2) $\begin{pmatrix} 7 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix};$ 7) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix};$ 12) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix};$

3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & -6 \end{pmatrix};$ 8) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix};$ 13) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix};$

4) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix};$ 9) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix};$ 14) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 9 \\ -2 & -6 & 1 \end{pmatrix};$

5) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix};$ 10) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix};$ 15) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix};$

16) $\begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; 21) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; 26) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

17) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$; 22) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$; 27) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

18) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$; 23) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; 28) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

19) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; 24) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; 29) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

20) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$; 25) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 30) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5.2. **Лінійні матричні рівняння.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix};$

7) $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix};$

8) $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix};$

9) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$

10) $\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$

11) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};$

12) $\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};$

13) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix};$

14) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix};$

15) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$

16) $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$

17) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix};$

18) $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix};$

19) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

20) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

21) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$;

22) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

23) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

24) $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

25) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;

26) $\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

27) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

28) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;

29) $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$;

30) $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5.3. **Знаходження оберненої матриці за допомогою елементарних перетворень.** Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайдіть для даної матриці обернену:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;
7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;
13) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
14) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;
9) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$;
15) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;
10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;
16) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;
11) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;
17) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;
12) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;
18) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

19) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
23) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;
27) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

20) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$;
24) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
28) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

21) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;
25) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;
29) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$;

22) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;
26) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
30) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

6. Ранг та дефект матриці

6.1. Знаходження базисних мінорів матриці. Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайдіть який–небудь базисний мінор та визначте ранг і дефект матриці:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & 10 & -1 \\ -1 & -2 & -5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;
3) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -8 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 0 & 7 & 6 \\ 1 & 8 & 2 & 11 & 12 \end{pmatrix}$;
4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 11 & -6 & 5 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -6 & -1 & 13 \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 7 & -13 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

12) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & -4 \end{pmatrix}$;

14) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 9 & 5 \\ -3 & 8 & -15 & -8 \end{pmatrix}$;

15) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

16) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

17) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

18) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

19) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

20) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

21) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

22) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

23) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

24) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

25) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$;

26) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$;

27) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

28) $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ -3 & -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$;

29) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

30) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

6.2. **Обчислення рангу та дефекту матриці за допомогою еквівалентних перетворень.** Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайдіть ранг та дефект матриці:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -6 & -1 & 13 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 7 & 13 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 13 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 11 & 7 \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

12) $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \\ -6 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 8 & 4 & 10 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & 10 & -1 \\ -1 & -2 & -5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

14) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$;

15) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 8 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

16) $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 10 & 4 & 14 \\ -14 & 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$;

17) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \\ 8 & 10 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

18) $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \\ -9 & 2 & -6 & 1 \\ 10 & 8 & 4 & 10 \end{pmatrix}$;

19) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

20) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 6 & -2 \\ 2 & -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$;

21) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 7 & -13 \end{pmatrix}$;

22) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

23) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

24) $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

25) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}$;

26) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$;

27) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 10 \\ -1 & 3 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

28) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

29) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 10 & 5 \\ 6 & -6 & 10 & 7 \\ 0 & -2 & -10 & -3 \\ 5 & -7 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

30) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -6 & -4 \\ 3 & 0 & 7 & 10 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Системи лінійних рівнянь

7.1. **Формули Крамера, матричний метод, метод Ґауса.** Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґауса та матричним методом:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 = 13, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -3, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + 15x_3 = -1. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -4, \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -14, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -1, \\ 7x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 1, \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -8, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

10) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 4, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

11) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -15, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 24, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = -5. \end{cases}$

12) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 16, \\ 3x_1 - 5x_2 - 5x_3 = -7, \\ -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$

13) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 10, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 9x_3 = -10. \end{cases}$

14) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -4, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = -1. \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -5, \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 = 13, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -6. \end{cases}$

16) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -3, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2, \\ -2x_2 + 2x_3 = -6. \end{cases}$

17) $\begin{cases} -2x_1 - 5x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

18) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

19) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4, \\ 7x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 10, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

20) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 8x_3 = -20, \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -4. \end{cases}$

21) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 8, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = -8, \\ x_1 + x_2 + 6x_3 = -19. \end{cases}$

22) $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$

23) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -8. \end{cases}$

24) $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -7, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$

25) $\begin{cases} -x_1 - x_2 + 5x_3 = -14, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2_3 = 10, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$

26) $\begin{cases} -2x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + 5x_3 = -4, \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 7. \end{cases}$

27) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

28) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 10, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = -6, \\ 3x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

29) $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 = -13, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$

30) $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4. \end{cases}$

7.2. **Метод Ґауса.** Розв'язати систему лінійних неоднорідних рівнянь методом Ґауса:

1) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 + 2x_5 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 4, \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_5 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 1, \\ -3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = -2, \\ 3x_1 - 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = -4. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = -4, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 2. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = -3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = -2, \\ 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 5. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4+x_5=10, \\ -x_1-x_2+4x_3+2x_4+x_5=3, \\ x_1+x_2+x_3-x_4+2x_5=-4, \\ 3x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1. \end{cases}$

10) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4-x_5=2, \\ 5x_1+x_2+x_3+4x_4+x_5=1, \\ 7x_1+5x_2-3x_3+12x_4=16, \\ 2x_1-x_2+2x_3+x_4+x_5=6. \end{cases}$

11) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4+x_5=10, \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=16, \\ x_1+3x_2+4x_3-x_4+x_5=-4, \\ x_1+x_2+x_3+x_4+3x_5=6. \end{cases}$

12) $\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=2, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+x_4+x_5=2, \\ 8x_1+x_2-3x_3+x_4+x_5=0, \\ 3x_1-7x_2+x_3-x_4+x_5=2. \end{cases}$

13) $\begin{cases} 2x_1+x_2+5x_3+x_4+x_5=2, \\ 4x_1-3x_2+2x_3+5x_4+3x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+3x_3+x_4+2x_5=-4, \\ 2x_1+7x_2-2x_3+3x_4+x_5=-14. \end{cases}$

14) $\begin{cases} -x_1+x_2+x_3+2x_4-x_5=4, \\ x_1-3x_2+4x_3-3x_4+x_5=20, \\ 2x_1+3x_2-2x_3+3x_4+5x_5=6, \\ 3x_1-2x_2-x_3+4x_4+5x_5=-3. \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3-2x_4+5x_5=10, \\ 3x_1+x_2-3x_3+2x_4+x_5=-5, \\ x_1+3x_2-2x_3+2x_4+3x_5=4, \\ 4x_1-x_2+x_3+5x_4+x_5=0. \end{cases}$

16) $\begin{cases} 2x_1-5x_2+2x_3+6x_4+2x_5=1, \\ -2x_1+3x_2-x_3+2x_4+x_5=5, \\ x_1+5x_2-x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 3x_1+x_2+x_3-2x_4-2x_5=-6. \end{cases}$

17) $\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3-x_4+x_5=2, \\ x_1+6x_2-2x_3+x_4-3x_5=3, \\ 4x_1+2x_3+6x_4+3x_5=1, \\ x_1+6x_2-2x_3+x_4-2x_5=-2. \end{cases}$

18) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3-5x_4-x_5=0, \\ x_1-x_2-2x_3+x_4+x_5=1, \\ 3x_1+x_2+x_3-x_4+x_5=12, \\ x_1+3x_2-2x_3+2x_4-3x_5=15. \end{cases}$

19) $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3-3x_4+x_5=1, \\ x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5=3, \\ 2x_1-x_2-2x_3+x_4-3x_5=2, \\ 4x_1-x_2+2x_3+3x_4+x_5=0. \end{cases}$

20) $\begin{cases} 4x_1-x_2+2x_3+x_4+x_5=4, \\ 3x_1-x_2-x_3+x_4+x_5=1, \\ -x_1+x_2+x_3-x_4+3x_5=-4, \\ -3x_1+2x_2+x_4-x_5=0. \end{cases}$

21) $\begin{cases} x_1+2x_3+6x_4+2x_5=7, \\ -x_1-3x_2+2x_4+x_5=10, \\ 4x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=-2, \\ 3x_1-x_2+2x_3+x_4+x_5=1. \end{cases}$

22) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+5x_4+x_5=1, \\ x_1+3x_2-4x_3+x_4+x_5=5, \\ -2x_1+x_3+x_4-3x_5=1, \\ 3x_1+4x_2-2x_3+x_4+x_5=0. \end{cases}$

23) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = -6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$

24) $\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = -1, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$

25) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 12, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = -3, \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$

26) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 5x_5 = 10, \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 11. \end{cases}$

27) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 - 3x_5 = -1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 5, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$

28) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 + 3x_5 = 3. \end{cases}$

29) $\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = -5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$

30) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = -3, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 = 3. \end{cases}$

7.3. **Однорідні системи, фундаментальна система розв'язків.** Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ -2x_1 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0, \\ -3x_2 - 6x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

12) $\begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 0. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

13) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_5 = 0, \\ x_2 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 0. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 - 7x_2 - 3x_3 - 15x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

14) $\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_3 - x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

15) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

9) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

16) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

10) $\begin{cases} x_1 - 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

17) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 1x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 6x_3 + x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$

11) $\begin{cases} -2x_1 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

18) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 10x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

19) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$

20) $\begin{cases} x_2 + x_3 + 2x_5 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

21) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

22) $\begin{cases} x_1 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

23) $\begin{cases} x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

24) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0. \end{cases}$

25) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

26) $\begin{cases} x_1 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + x_5 = 0, \\ 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

27) $\begin{cases} 2x_1 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 6x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

28) $\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 1x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

29) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 12x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$

30) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_5 = 0. \end{cases}$

8. Лінійні простори

8.1. **Перевірка аксіом лінійного простору.** З'ясувати, чи є наведена множина лінійним простором. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

1) Множина векторів з R^3, що є колінеарними до вектора $\overrightarrow{a} = (4; 5; -1)$.
2) Множина векторів з R^3, що є компланарними з векторами $\overrightarrow{a} = (1; 2; 3)$ та $\overrightarrow{b} = (-2; 3; 0)$.
3) Множина векторів з R^3, довжина яких не перевищує одиниці.
4) Множина квадратних матриць, сліди яких дорівнюють нулю.
5) Множина функцій, неперервних на відрізку $[a; b]$.
6) Множина вироджених матриць, тобто таких, що $detA = 0$.
7) Множина розв'язків рівняння $x + 2y + 3z = 0$.
8) Множина многочленів другого степеня.
9) Множина обмежених на відрізку $[a; b]$ функцій.
10) Множина многочленів третього степеня.
11) Множина неперервно диференційовних на R функцій, для яких $f'(0) = 1$.
12) Множина матриць, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.
13) Множина многочленів степеня, що не перевищує два.
14) Множина неперервно диференційовних на R функцій, для яких $f'(0) = 0$.
15) Множина непарних функцій.
16) Множина парних функцій.
17) Множина монотонно зростаючих на інтервалі $(a; b)$ функцій.
18) Множина симетричних матриць.
19) Множина монотонно спадаючих на інтервалі $(a; b)$ функцій.
20) Множина розв'язків рівняння $x + y + z = 2$.
21) Множина многочленів степеня, що не перевищує три.
22) Множина неперервно диференційовних на інтервалі $(a; b)$ функцій.
23) Множина натуральних чисел, кратних 5.
24) Множина нескоротних дробів доповнена нульовим елементом.
25) Множина таких функцій, що $f(0) = 0$.

26) Множина нижніх трикутних матриць.

27) Множина неперервних функцій, що не мають екстремумів при $x \in (0; +\infty)$.

28) Множина квадратних тричленів, що мають нульовий дискримінант.

29) Множина функцій, що неперервні скрізь на R, окрім точки $x = 0$, в якій функція має розрив стрибком.

30) Множина таких функцій, що $f(1) = 1$.

8.2. **Лінійна незалежність векторів.** Вкажіть який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів.

1) $f_1(x) = 3x^2 - 2x + 1,\ f_2(x) = 5x - 4,\ f_3(x) = -39x^2 + x + 7;$

2) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 11 & 2 \end{pmatrix};$

3) $f_1(x) = \frac{5}{\cos^2 x},\ f_2(x) = \mathrm{tg}^2\, x,\ f_3(x) = 4,\ x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2});$

4) $\overrightarrow{a_1} = (1; -2; 3; 7),\ \overrightarrow{a_2} = (4; 5; 1; -2),\ \overrightarrow{a_3} = (5; 3; 4; 6);$

5) $f_1(x) = x^2 - x + 6,\ f_2(x) = -6x^2 + 3x - 1,\ f_3(x) = 7x^2 + 2x - 4;$

6) $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$

7) $f_1(x) = \frac{1}{x^2},\ f_2(x) = \frac{1}{x},\ f_3(x) = 1,\ x \in (0; 1);$

8) $\overrightarrow{a_1} = (5; -1; 4; 6),\ \overrightarrow{a_2} = (3; 2; -1; -8),\ \overrightarrow{a_3} = (9; 0; 3; 6);$

9) $f_1(x) = 5x^2 + 4x - 1,\ f_2(x) = 3x^2 + 2x + 7,\ f_3(x) = 7x^2 + 6x - 9;$

10) $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 13 \end{pmatrix};$

11) $f_1(x) = \sin^2 x,\ f_2(x) = \cos 2x,\ f_3(x) = -2;$

12) $\overrightarrow{a_1} = (4; -2; 8; 3),\ \overrightarrow{a_2} = (1; 0; 1; -1),\ \overrightarrow{a_3} = (1; -2; 5; 6);$

13) $f_1(x) = -x^2 + 1,\ f_2(x) = x^2 + 7x - 1,\ f_3(x) = 2x^2 + 6x + 8;$

14) $A = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ -3 & 8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & -13 \\ 7 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix};$

15) $\overrightarrow{a_1} = (3; -1; 0; 2),\ \overrightarrow{a_2} = (1; 1; 1; -1),\ \overrightarrow{a_3} = (1; 0; 0; -6);$

16) $f_1(x) = \frac{e^{2x}}{x},\ f_2(x) = (1 + x)e^{2x},\ f_3(x) = e^{2x},\ x \in (0; +\infty);$

17) $f_1(x) = 4x^2 - 2x + 8,\ f_2(x) = x^2 + 1,\ f_3(x) = x^2 - 2x + 5;$

18) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -0 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$

19) $f_1(x) = \frac{3}{\sin^2 x},\ f_2(x) = \operatorname{ctg}^2 x,\ f_3(x) = 5,\ x \in (0; \pi);$

20) $\overrightarrow{a_1} = (1; 0; 1; 1),\ \overrightarrow{a_2} = (2; 0; 1; -2),\ \overrightarrow{a_3} = (1; 0; 2; 5);$

21) $f_1(x) = x^3 - x + 1,\ f_2(x) = 5x^2 - 4x + 3,\ f_3(x) = x^3;$

22) $A = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$

23) $f_1(x) = 3,\ f_2(x) = \operatorname{tg} x,\ f_3(x) = \operatorname{ctg} x,\ x \in (0; \frac{\pi}{2});$

24) $\overrightarrow{a_1} = (2; 3; 4; 5),\ \overrightarrow{a_2} = (5; 4; 3; 2),\ \overrightarrow{a_3} = (1; -1; 1; -1);$

25) $f_1(x) = x^3 + x + 1,\ f_2(x) = 2x^3 + x - 2,\ f_3(x) = x^3 + 2x + 5;$

26) $A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 13 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -11 & 8 \\ 5 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

27) $f_1(x) = 1,\ f_2(x) = \arcsin x,\ f_3(x) = \arccos x,\ x \in [-1;1]$;

28) $\overrightarrow{a_1} = (5;-4;3;5),\ \overrightarrow{a_2} = (1;5;0;-9),\ \overrightarrow{a_3} = (3;-14;3;23)$;

29) $f_1(x) = x^2 - x - 1,\ f_2(x) = x^2 + 3,\ f_3(x) = 2x^2 - 4x - 7$;

30) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$.

8.3. **Знаходження бази системи векторів.** Знайти всі бази системи векторів.

1) $\overrightarrow{a_1} = (1;2;0;0),\ \overrightarrow{a_2} = (1;2;3;4),\ \overrightarrow{a_3} = (3;6;0;0),\ \overrightarrow{a_4} = (2;1;-4;5)$;

2) $\overrightarrow{a_1} = (1;2;3;4),\ \overrightarrow{a_2} = (2;3;4;5),\ \overrightarrow{a_3} = (3;4;5;6),\ \overrightarrow{a_4} = (4;5;6;7)$;

3) $\overrightarrow{a_1} = (-1;4;3;5),\ \overrightarrow{a_2} = (2;1;0;1),\ \overrightarrow{a_3} = (3;6;3;7)$;

4) $\overrightarrow{a_1} = (1;2;0;-1;4),\ \overrightarrow{a_2} = (3;1;3;3;1),\ \overrightarrow{a_3} = (7;3;2;8;1)$,
$\overrightarrow{a_4} = (4;2;-1;5;0)$;

5) $\overrightarrow{a_1} = (2;-6;0;1), \overrightarrow{a_2} = (5;4;-3;4), \overrightarrow{a_3} = (7;1;-2;8)$,
$\overrightarrow{a_4} = (5;5;-6;0)$;

6) $\overrightarrow{a_1} = (3;-2;1;-1), \overrightarrow{a_2} = (5;2;-3;6), \overrightarrow{a_3} = (8;0;-2;5)$,
$\overrightarrow{a_4} = (2;4;-4;7)$;

7) $\overrightarrow{a_1} = (2;3;0;-1), \overrightarrow{a_2} = (-4;-6;0;2), \overrightarrow{a_3} = (6;9;0;-3)$,
$\overrightarrow{a_4} = (8;12;0;-4)$;

8) $\overrightarrow{a_1} = (7;1;-2;4), \overrightarrow{a_2} = (1;3;-3;2), \overrightarrow{a_3} = (1;-1;1;2)$,
$\overrightarrow{a_4} = (7;5;-6;4)$;

9) $\overrightarrow{a_1} = (-1;2;3),\ \overrightarrow{a_2} = (1;2;-3),\ \overrightarrow{a_3} = (5;-6;0),\ \overrightarrow{a_4} = (1;-4;5)$;

10) $\overrightarrow{a_1} = (2;3;7;-8),\ \overrightarrow{a_2} = (0;0;1;-1),\ \overrightarrow{a_3} = (1;-1;0;0)$,
$\overrightarrow{a_4} = (-3;-2;-8;9)$;

11) $\overrightarrow{a_1} = (4;-2;7;6;1),\ \overrightarrow{a_2} = (2;0;-3;2;1),\ \overrightarrow{a_3} = (2;-6;23;6;-1)$;

12) $\overrightarrow{a_1} = (5;-2;3;-2),\ \overrightarrow{a_2} = (-1;3;6;4),\ \overrightarrow{a_3} = (4;1;9;2)$,
$\overrightarrow{a_4} = (3;4;15;6)$;

13) $\overrightarrow{a_1} = (-7; 1; 3; 6)$, $\overrightarrow{a_2} = (-2; 13; 4; -5)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 4; -3; 8)$,
$\overrightarrow{a_4} = (2; 2; -2; 1)$;

14) $\overrightarrow{a_1} = (-3; 1; 1; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (6; -1; 0; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (3; 0; 1; 2)$;

15) $\overrightarrow{a_1} = (9; 6; 0; -3; 0)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; -1; 4; 3; 5)$, $\overrightarrow{a_3} = (0; 1; 1; 1; 1)$,
$\overrightarrow{a_4} = (2; 0; 5; 4; 4)$;

16) $\overrightarrow{a_1} = (1; 4; 3; 6)$, $\overrightarrow{a_2} = (-5; 2; -3; 0)$, $\overrightarrow{a_3} = (2; 1; 2; 7)$,
$\overrightarrow{a_4} = (0; 2; 1; 5)$;

17) $\overrightarrow{a_1} = (1; 12; 10; -1)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; -2; -3; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 1; -4; 1)$,
$\overrightarrow{a_4} = (5; 11; 3; 2)$;

18) $\overrightarrow{a_1} = (5; 2; 0; -4)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; 7; 0; 11)$, $\overrightarrow{a_3} = (2; 9; 6; -8)$,
$\overrightarrow{a_4} = (8; 9; 0; -4)$;

19) $\overrightarrow{a_1} = (3; -1; 6; 4)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 1; 1; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (0; -1; 1; 0)$,
$\overrightarrow{a_4} = (6; -2; 12; 8)$;

20) $\overrightarrow{a_1} = (-4; 12; 7)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 5; -7)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; -1; 5)$, $\overrightarrow{a_4} = (7; 6; 6)$;

21) $\overrightarrow{a_1} = (10; -3; 6; -8)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 8; 1; -7)$, $\overrightarrow{a_3} = (4; -4; 3; 3)$,
$\overrightarrow{a_4} = (-1; 6; -1; -5)$;

22) $\overrightarrow{a_1} = (-11; -3; 2; 0; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (12; 0; 4; 7; 6)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; -1; 3; 4; -7)$;

23) $\overrightarrow{a_1} = (4; 5; -7; 8)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; 2; 1; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (3; 3; -8; 6)$,
$\overrightarrow{a_4} = (2; 1; -9; 4)$;

24) $\overrightarrow{a_1} = (2; -1; 3; 4)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; 5; 0; 9)$, $\overrightarrow{a_3} = (6; -7; 1; 0)$;

25) $\overrightarrow{a_1} = (0; 1; 3; 2)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; -1; 8; 4)$, $\overrightarrow{a_3} = (2; -2; 9; 4)$;

26) $\overrightarrow{a_1} = (6; 4; 3; 10; 7)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; 2; -3; 3; -1)$, $\overrightarrow{a_3} = (5; 1; -6; 6; -5)$,
$\overrightarrow{a_4} = (2; 2; 3; 4; 5)$;

27) $\overrightarrow{a_1} = (1; 1; 1; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (-1; 0; -3; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 1; -1; -1)$,
$; \overrightarrow{a_4} = (3; 4; 1; 5)$;

28) $\overrightarrow{a_1} = (4; -5; 6; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; 2; -1; 8)$, $\overrightarrow{a_3} = (9; 1; -3; 7)$,
$\overrightarrow{a_4} = (1; 4; -5; 9)$;

29) $\overrightarrow{a_1} = (1; 3; 2; -1)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; 2; 0; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (7; -9; 1; 4)$,
$\overrightarrow{a_4} = (11; -4; 3; 5)$;

30) $\overrightarrow{a_1} = (6; 5; 4; 3)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 6; -7; 8)$, $\overrightarrow{a_3} = (4; -1; 11; -5)$,
$\overrightarrow{a_4} = (-4; 1; -11; 5)$.

8.4. **Базис та розмірність лінійного простору.** Знайти базис та розмірність вказаного лінійного простору.

1) Розв'язків рівняння $x + y + z = 0$.
2) Многочленів степеня не вище другого, для яких $f'(0) = 0$.
3) Векторів з R^3, що ортогональні до векторів $\overrightarrow{a} = (2; -1; 4)$ та $\overrightarrow{b} = (3; 1; 8)$.
4) Симетричних матриць порядку 2.
5) Непарних функцій, що є многочленами не вище третього порядку.
6) Матриць порядку 2, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$.
7) Многочленів степеня не вище другого, для яких $f(0) = 0$.
8) Векторів з R^3, що ортогональні до вектора $\overrightarrow{a} = (3; -2; 5)$.
9) Матриць порядку 2, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.
10) Многочленів степеня не вище другого, для яких $f'(0) = f(0)$.
11) Векторів з R^3, що компланарні з векторами $\overrightarrow{a} = (0; -2; 3)$ та $\overrightarrow{b} = (1; 5; 4)$.
12) Матриць порядку 2 з нульовим слідом.
13) Парних функцій, що є многочленами не вище другого порядку.
14) Матриць порядку 2, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
15) Многочленів степеня не вище другого, для яких $f(1) = 0$.
16) Векторів з R^3, що колінеарні вектору $\overrightarrow{a} = (1; -1; 3)$.
17) Матриць порядку 2, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.
18) Многочленів степеня не вище другого, для яких $f'(1) = 0$.
19) Векторів з R^3, що ортогональні до векторів $\overrightarrow{a} = (3; -6; 1)$ та $\overrightarrow{b} = (1; 4; 5)$.

20) Кососиметричних матриць порядку 2.

21) Розв'язків рівняння $2x - 3y + z = 0$.

22) Матриць порядку 2, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

23) Многочленів степеня не вище другого, для яких $f(-1) = 0$.

24) Векторів з R^3, що ортогональні до вектора $\overrightarrow{a} = (4; 2; 9)$.

25) Матриць порядку 2, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

26) Многочленів степеня не вище другого, для яких $f'(1) = f(1)$.

27) Векторів з R^3, що компланарні з векторами $\overrightarrow{a} = (1; 7; 4)$ та $\overrightarrow{b} = (3; 8; 1)$.

28) Матриць порядку 2 з нульовим першим рядком.

29) Парних функцій, що є многочленами не вищє четвертого порядку.

30) Матриць порядку 2, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$.

8.5. **Розклад вектора за базисом, координати вектора.** Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами:

1) $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $x_4 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $x_5 = \begin{pmatrix} 19 & -1 \\ 20 & -2 \end{pmatrix}$.

2) $f_1(x) = -4x^3 + 5x^2 + 2x + 6$, $f_2(x) = 7x^3 + 3x^2 + x + 2$, $f_3(x) = 4x^3 + 3x^2 + 5$, $f_4(x) = 2x^3 - 2x^2 + 4x + 6$, $f_5(x) = 28x^3 - 3x^2 + 2x + 3$.

3) $\overrightarrow{a_1} = (1; 3; 2; 8)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; -1; 5; 6)$, $\overrightarrow{a_3} = (6; 2; 5; 1)$, $\overrightarrow{a_4} = (4; 0; -1; 3)$, $\overrightarrow{a_5} = (9; 0; 14; -3)$.

4) $x_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $x_4 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $x_5 = \begin{pmatrix} -4 & 15 \\ 13 & 17 \end{pmatrix}$.

5) $f_1(x) = x^3 + 3x^2 + 2x,\ f_2(x) = 4x^3 + 5x^2 + x + 8,$
$f_3(x) = 6x^3 + 3x^2 - 2,\ f_4(x) = 2x^3 + 5x^2 + x + 4,\ f_5(x) = x^3 - 4x^2 - 14.$

6) $\overrightarrow{a_1} = (5; 7; 6; -1),\ \overrightarrow{a_2} = (4; 2; 0; 3),\ \overrightarrow{a_3} = (2; 2; 1; -5),\ \overrightarrow{a_4} = (6; 4; 2; 7),$
$\overrightarrow{a_5} = (15; 13; 6; -9).$

7) $x_1 = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ x_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$
$x_5 = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 13 & -1 \end{pmatrix}.$

8) $f_1(x) = 2x^3 + 6x^2 + 3x + 3,\ f_2(x) = 4x^2 + x - 1,$
$f_3(x) = 2x^3 + 5x^2 + 3x + 7,\ f_4(x) = 6x^3 - 4x^2 - x + 2,$
$f_5(x) = -8x^3 + 24x^2 + 9x + 1.$

9) $\overrightarrow{a_1} = (-4; 1; 2; 6),\ \overrightarrow{a_2} = (-5; -1; 2; 3),\ \overrightarrow{a_3} = (0; 1; 7; 4),\ \overrightarrow{a_4} = (2; 8; -5; 0),$
$\overrightarrow{a_5} = (-16; 12; 31; 34).$

10) $x_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix},\ x_4 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$
$x_5 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -8 & 14 \end{pmatrix}.$

11) $f_1(x) = x^3 + 6x + 1,\ f_2(x) = -4x^3 + 3x^2 + 2x + 5,$
$f_3(x) = x^3 + 7x^2 + 2x + 8,\ f_4(x) = 3x^3 + 3x^2 - x + 6,$
$f_5(x) = 6x^3 + 34x^2 + 27x + 46.$

12) $\overrightarrow{a_1} = (3; 7; 1; 4),\ \overrightarrow{a_2} = (-5; 2; 6; 8),\ \overrightarrow{a_3} = (0; 1; 5; 1),\ \overrightarrow{a_4} = (3; 3; 6; 2),$
$\overrightarrow{a_5} = (2; 17; 41; 35).$

13) $x_1 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix},\ x_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix},$
$x_5 = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 22 & 15 \end{pmatrix}.$

14) $f_1(x) = 3x^3 + x^2 + 5x + 8,\ f_2(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2,$
$f_3(x) = 7x^3 + -6x^2 + 4x + 4,\ f_4(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 1,$
$f_5(x) = 16x^3 + 5x^2 + 17x + 21.$

15) $\overrightarrow{a_1} = (1; -5; 3; 7),\ \overrightarrow{a_2} = (2; 5; 2; 4),\ \overrightarrow{a_3} = (6; 5; 1; 8),\ \overrightarrow{a_4} = (3; 9; 4; -6),$
$\overrightarrow{a_5} = (-11; 16; 6; -63).$

16) $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix},\ x_4 = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -4 \end{pmatrix},$
$x_5 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}.$

17) $f_1(x) = x^3 + 4x^2 + 3x + 2,\ f_2(x) = 2x^3 - x^2 + 5x,$
$f_3(x) = 6x^3 + 4x^2 + 3x + 5,\ f_4(x) = -8x^3 + 2x^2 + x + 9,$
$f_5(x) = 25x^3 + 3x^2 + 9x - 11.$

18) $\overrightarrow{a_1} = (0; 1; 1; 5),\ \overrightarrow{a_2} = (2; 8; 3; 4),\ \overrightarrow{a_3} = (7; -6; 5; 2),\ \overrightarrow{a_4} = (1; 4; 3; 7),$
$\overrightarrow{a_5} = (-2; 28; 6; 23).$

19) $x_1 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\ x_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$
$x_5 = \begin{pmatrix} 20 & 11 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}.$

20) $f_1(x) = 5x^3 + 5x^2 + x + 3,\ f_2(x) = 4x^3 + 2x^2 + x,$
$f_3(x) = -x^3 + 6x^2 + 2x + 3,\ f_4(x) = 4x^3 + 7x^2 + 5x + 2,$
$f_5(x) = 25x^3 + 12x^2 + 5x + 5.$

21) $\overrightarrow{a_1} = (2; 1; 5; 7),\ \overrightarrow{a_2} = (6; 4; 3; 1),\ \overrightarrow{a_3} = (-5; 2; 6; 8),\ \overrightarrow{a_4} = (3; 7; 4; 2),$
$\overrightarrow{a_5} = (5; -3; 14; 20).$

22) $x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix},\ x_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},$
$x_5 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}.$

23) $f_1(x) = x^3 - x^2 - x,\ f_2(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 7,$
$f_3(x) = 4x^3 + 2x^2 + 5x + 6,\ f_4(x) = -3x^3 + x^2 + 1,$
$f_5(x) = 2x^3 + x + 8.$

24) $\overrightarrow{a_1} = (0; 5; 1; 8),\ \overrightarrow{a_2} = (2; 4; 6; 5),\ \overrightarrow{a_3} = (4; 3; -2; 1),\ \overrightarrow{a_4} = (2; 5; 7; 4),$
$\overrightarrow{a_5} = (10; 25; 5; 31).$

25) $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix},\ x_4 = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$
$x_5 = \begin{pmatrix} -4 & -18 \\ 14 & 14 \end{pmatrix}.$

26) $f_1(x) = 2x^3 + x^2 + 5x + 4,\ f_2(x) = 3x^3 - 6x^2 + 5,$
$f_3(x) = 4x^3 + 8x^2 + x + 7,\ f_4(x) = 6x^3 + 6x^2 + 2x + 3,$
$f_5(x) = 4x^3 + 23x^2 + 16x + 9.$

27) $\overrightarrow{a_1} = (6; 2; 6; 3),\ \overrightarrow{a_2} = (7; 8; 1; -5),\ \overrightarrow{a_3} = (2; 3; 8; 4),\ \overrightarrow{a_4} = (6; 1; 1; 9),$
$\overrightarrow{a_5} = (13; -1; 15; 30).$

28) $x_1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix},\ x_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix},$
$x_5 = \begin{pmatrix} 22 & 16 \\ 35 & 52 \end{pmatrix}.$

29) $f_1(x) = 3x^3 + 2x^2 + 7x + 1,\ f_2(x) = 4x^3 - x + 2,$
$f_3(x) = 5x^3 + 3x^2 + 2x + 8,\ f_4(x) = 6x^3 + x^2 + 4x + 7,$
$f_5(x) = 14x^3 + x^2 + 12x + 9.$

30) $\overrightarrow{a_1} = (-1; 4; 3; 2),\ \overrightarrow{a_2} = (0; 5; 5; 7),\ \overrightarrow{a_3} = (2; 4; 4; 8),\ \overrightarrow{a_4} = (6; 3; -1; -5),$
$\overrightarrow{a_5} = (-1; -2; 1; 10).$

8.6. **Перетворення координат вектора при переході до іншого базису.** Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.

1) $\overrightarrow{b} = (-2; 1; 2)$,
$\overrightarrow{f_1} = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}.$

2) $\overrightarrow{b} = (-1; 2; 1),\ \overrightarrow{f_1} = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{f_3} = 3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}.$

3) $\overrightarrow{b} = (0; 1; 1)$,
$\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}.$

4) $\overrightarrow{b} = (5; 7; 7)$,
$\overrightarrow{f_1} = -\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} + 4\overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = 2\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = 3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}.$

5) $\overrightarrow{b} = (2; 2; 0)$,
$\overrightarrow{f_1} = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = -\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}.$

6) $\overrightarrow{b} = (-1; 2; -1),\ \overrightarrow{f_1} = 3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}.$

7) $\overrightarrow{b} = (1; 1; -1),\ \overrightarrow{f_1} = 4\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}.$

8) $\overrightarrow{b} = (3; 0; 1),\ \overrightarrow{f_1} = -\overrightarrow{e_1} + 4\overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}.$

9) $\overrightarrow{b} = (-1; -1; -1)$,
$\overrightarrow{f_1} = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}.$

10) $\overrightarrow{b} = (-1; -1; 1)$,
$\overrightarrow{f_1} = 3\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}.$

11) $\overrightarrow{b} = (1; 2; 1),\ \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}.$

12) $\overrightarrow{b} = (1; 3; 0),\ \overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}.$

13) $\overrightarrow{b} = (1; 0; 0),\ \overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = -\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}.$

14) $\overrightarrow{b} = (0; 2; 0),\ \overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = -\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}.$

15) $\overrightarrow{b} = (1; -1; 0),\ \overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = 3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}.$

16) $\overrightarrow{b} = (0; 0; 3),\ \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{f_2} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}.$

17) $\overrightarrow{b} = (0; 1; -1),\ \overrightarrow{f_1} = 3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}.$

18) $\overrightarrow{b} = (2;0;-1)$,
$\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}.$

19) $\overrightarrow{b} = (0;2;-1),\ \overrightarrow{f_1} = 3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{f_2} = -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}.$

20) $\overrightarrow{b} = (1;-2;1)$,
$\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}.$

21) $\overrightarrow{b} = (2;0;2),\ \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}.$

22) $\overrightarrow{b} = (1;1;0),\ \overrightarrow{f_1} = 3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}.$

23) $\overrightarrow{b} = (4;1;1),\ \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}.$

24) $\overrightarrow{b} = (0;1;2)$,
$\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = 3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}.$

25) $\overrightarrow{b} = (3;1;0),\ \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{f_2} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}.$

26) $\overrightarrow{b} = (0;1;3)$,
$\overrightarrow{f_1} = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = -\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}.$

27) $\overrightarrow{b} = (3;0;1),\ \overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}.$

28) $\overrightarrow{b} = (3;-1;0),\ \overrightarrow{f_1} = -\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{f_2} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}.$

29) $\overrightarrow{b} = (2;2;0),\ \overrightarrow{f_1} = 3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = -\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}.$

30) $\overrightarrow{b} = (0;-2;2),\ \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = 3\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = -\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}.$

8.7. **Сума та перетин підпросторів.** Знайти базис і розмірність суми та перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$.

1) $\overrightarrow{a_1} = (1,-1,1,-1), \overrightarrow{a_2} = (2,2,3,-1), \overrightarrow{a_3} = (4,0,5,-3)$,
$\overrightarrow{b_1} = (3,1,4,-2), \overrightarrow{b_2} = (1,1,2,-1), \overrightarrow{b_3} = (5,3,8,-4)$.

2) $\overrightarrow{a_1} = (1,-1,4,1), \overrightarrow{a_2} = (2,3,1,-1), \overrightarrow{a_3} = (4,1,9,1)$,
$\overrightarrow{b_1} = (1,4,-3,-2), \overrightarrow{b_2} = (1,0,1,1), \overrightarrow{b_3} = (5,2,7,2)$.

3) $\overrightarrow{a_1} = (4,1,-1,1), \overrightarrow{a_2} = (1,3,-1,-2), \overrightarrow{a_3} = (6,7,-3,-5)$,
$\overrightarrow{b_1} = (-1,8,-2,-7), \overrightarrow{b_2} = (2,-1,-1,1), \overrightarrow{b_3} = (8,6,-4,-2)$.

4) $\overrightarrow{a_1} = (1,-2,1,1), \overrightarrow{a_2} = (2,3,1,2), \overrightarrow{a_3} = (4,-1,3,4)$,
$\overrightarrow{b_1} = (5,4,3,5), \overrightarrow{b_2} = (-1,-1,2,0), \overrightarrow{b_3} = (3,-2,5,4)$.

5) $\overrightarrow{a_1} = (2,-1,2,-1), \overrightarrow{a_2} = (3,0,3,1), \overrightarrow{a_3} = (7,-2,7,-1)$,
$\overrightarrow{b_1} = (4,1,4,3), \overrightarrow{b_2} = (1,1,2,-1), \overrightarrow{b_3} = (7,1,9,-2)$.

6) $\overrightarrow{a_1} = (2,2,-2,1), \overrightarrow{a_2} = (1,3,-1,-3), \overrightarrow{a_3} = (1,-1,-1,2)$,
$\overrightarrow{b_1} = (4,8,-4,-5), \overrightarrow{b_2} = (1,1,1,2), \overrightarrow{b_3} = (5,9,-3,-3)$.

7) $\overrightarrow{a_1} = (-1,-1,-1,1), \overrightarrow{a_2} = (1,-1,0,2), \overrightarrow{a_3} = (2,0,1,1)$,
$\overrightarrow{b_1} = (3,1,2,0), \overrightarrow{b_2} = (1,-1,3,1), \overrightarrow{b_3} = (0,-4,1,5)$.

8) $\overrightarrow{a_1} = (1,-1,2,3), \overrightarrow{a_2} = (-1,2,3,1), \overrightarrow{a_3} = (1,0,7,7)$,
$\overrightarrow{b_1} = (2,-3,-1,2), \overrightarrow{b_2} = (2,1,1,1), \overrightarrow{b_3} = (5,-3,2,6)$.

9) $\overrightarrow{a_1} = (1,1,-1,2), \overrightarrow{a_2} = (2,1,-1,1), \overrightarrow{a_3} = (1,0,0,-1)$,
$\overrightarrow{b_1} = (4,3,-3,5), \overrightarrow{b_2} = (1,2,-1,-1), \overrightarrow{b_3} = (5,5,-4,4)$.

10) $\overrightarrow{a_1} = (1,1,-1,1), \overrightarrow{a_2} = (2,-1,3,1), \overrightarrow{a_3} = (1,-2,4,0)$,
$\overrightarrow{b_1} = (4,1,1,3), \overrightarrow{b_2} = (1,1,-2,1), \overrightarrow{b_3} = (5,2,-1,4)$.

11) $\overrightarrow{a_1} = (2,2,1,2), \overrightarrow{a_2} = (-1,-1,1,3), \overrightarrow{a_3} = (5,5,4,9)$,
$\overrightarrow{b_1} = (3,3,0,-1), \overrightarrow{b_2} = (2,-1,-1,1), \overrightarrow{b_3} = (2,-1,2,9)$.

12) $\overrightarrow{a_1} = (1,-1,1,1), \overrightarrow{a_2} = (3,2,1,-1), \overrightarrow{a_3} = (1,4,-1,-3)$,
$\overrightarrow{b_1} = (2,3,0,-2), \overrightarrow{b_2} = (1,1,2,1), \overrightarrow{b_3} = (6,1,5,2)$.

13) $\overrightarrow{a_1} = (1,2,-1,-2), \overrightarrow{a_2} = (3,1,1,-1), \overrightarrow{a_3} = (2,-1,2,1),$
$\overrightarrow{b_1} = (1,-3,3,3), \overrightarrow{b_2} = (-1,2,1,1), \overrightarrow{b_3} = (4,7,0,-4).$

14) $\overrightarrow{a_1} = (1,-1,2,-2), \overrightarrow{a_2} = (3,1,-1,-1), \overrightarrow{a_3} = (1,3,-5,3),$
$\overrightarrow{b_1} = (0,-4,7,-5), \overrightarrow{b_2} = (1,1,2,1), \overrightarrow{b_3} = (0,0,7,1).$

15) $\overrightarrow{a_1} = (3,1,-1,2), \overrightarrow{a_2} = (2,-1,2,1), \overrightarrow{a_3} = (-1,3,-5,4),$
$\overrightarrow{b_1} = (3,-4,7,1), \overrightarrow{b_2} = (1,2,1,-1), \overrightarrow{b_3} = (2,-6,-2,6).$

16) $\overrightarrow{a_1} = (1,-1,-3,1), \overrightarrow{a_2} = (2,1,1,1), \overrightarrow{a_3} = (4,-1,-5,3),$
$\overrightarrow{b_1} = (5,1,-1,3), \overrightarrow{b_2} = (-2,0,2,1), \overrightarrow{b_3} = (-2,-3,-5,2).$

17) $\overrightarrow{a_1} = (0,2,1,-1), \overrightarrow{a_2} = (1,-1,3,1), \overrightarrow{a_3} = (2,0,7,1),$
$\overrightarrow{b_1} = (-1,3,-2,-2), \overrightarrow{b_2} = (1,2,-1,-1), \overrightarrow{b_3} = (2,5,4,-2).$

18) $\overrightarrow{a_1} = (1,2,3,1), \overrightarrow{a_2} = (-1,2,-1,-1), \overrightarrow{a_3} = (1,6,5,1),$
$\overrightarrow{b_1} = (0,8,4,0), \overrightarrow{b_2} = (-1,2,2,1), \overrightarrow{b_3} = (-2,8,6,2).$

19) $\overrightarrow{a_1} = (-1,-1,-1,2), \overrightarrow{a_2} = (2,1,-1,1), \overrightarrow{a_3} = (0,-1,-3,5),$
$\overrightarrow{b_1} = (5,3,-1,4), \overrightarrow{b_2} = (1,2,-1,1), \overrightarrow{b_3} = (3,4,-4,5).$

20) $\overrightarrow{a_1} = (1,-2,3,1), \overrightarrow{a_2} = (1,3,-1,-1), \overrightarrow{a_3} = (1,-7,7,3),$
$\overrightarrow{b_1} = (6,-2,10,2), \overrightarrow{b_2} = (1,2,1,-1), \overrightarrow{b_3} = (2,2,0,0).$

21) $\overrightarrow{a_1} = (1,-2,-1,-1), \overrightarrow{a_2} = (3,0,1,1), \overrightarrow{a_3} = (5,-4,-1,-1),$
$\overrightarrow{b_1} = (1,4,3,3), \overrightarrow{b_2} = (1,2,1,-1), \overrightarrow{b_3} = (4,-6,-2,0).$

22) $\overrightarrow{a_1} = (1,2,2,2), \overrightarrow{a_2} = (1,-1,2,-2), \overrightarrow{a_3} = (3,3,6,2),$
$\overrightarrow{b_1} = (1,-7,2,-10), \overrightarrow{b_2} = (2,1,1,-1), \overrightarrow{b_3} = (2,4,1,3).$

23) $\overrightarrow{a_1} = (1,1,3,1), \overrightarrow{a_2} = (1,-1,2,1), \overrightarrow{a_3} = (-1,5,0,-1),$
$\overrightarrow{b_1} = (-1,3,-1,-1), \overrightarrow{b_2} = (3,1,2,1), \overrightarrow{b_3} = (1,5,5,1).$

24) $\overrightarrow{a_1} = (1,-2,2,1), \overrightarrow{a_2} = (1,1,-2,2), \overrightarrow{a_3} = (1,-5,6,0),$
$\overrightarrow{b_1} = (5,-4,2,7), \overrightarrow{b_2} = (2,1-1,1), \overrightarrow{b_3} = (3,-4,5,1).$

25) $\overrightarrow{a_1} = (1,1,1,1), \overrightarrow{a_2} = (1,-1,1,-1), \overrightarrow{a_3} = (1,3,1,3),$
$\overrightarrow{b_1} = (1,2,0,2), \overrightarrow{b_2} = (1,2,1,2), \overrightarrow{b_3} = (3,1,3,1).$

26) $\overrightarrow{a_1} = (-1,-1,1,1), \overrightarrow{a_2} = (1,-1,-1,1), \overrightarrow{a_3} = (-1,-3,1,3),$
$\overrightarrow{b_1} = (0,-4,0,4), \overrightarrow{b_2} = (2,1,2,-1), \overrightarrow{b_3} = (-2,-3,6,3).$

27) $\overrightarrow{a_1} = (1, 1, -1, 1), \overrightarrow{a_2} = (1, 1, 1, -1), \overrightarrow{a_3} = (3, 3, -1, 1),$
$\overrightarrow{b_1} = (2, 2, -6, 6), \overrightarrow{b_2} = (2, 3, 1, -1), \overrightarrow{b_3} = (4, 5, 1, -1).$

28) $\overrightarrow{a_1} = (1, -1, 1, -1), \overrightarrow{a_2} = (1, 1, -2, 1), \overrightarrow{a_3} = (4, -2, 1, -2),$
$\overrightarrow{b_1} = (5, 1, -4, 1), \overrightarrow{b_2} = (3, 1, 0, 1), \overrightarrow{b_3} = (5, 1, -1, 1).$

29) $\overrightarrow{a_1} = (-1, 2, 1, 0), \overrightarrow{a_2} = (1, -1, 2, 1), \overrightarrow{a_3} = (2, -1, 7, 3),$
$\overrightarrow{b_1} = (4, -6, 6, 2), \overrightarrow{b_2} = (2, 1, -1, 2), \overrightarrow{b_3} = (0, -8, 8, -2).$

30) $\overrightarrow{a_1} = (1, 1, 2, -1), \overrightarrow{a_2} = (1, -1, 1, 2), \overrightarrow{a_3} = (-1, 5, 1, 8),$
$\overrightarrow{b_1} = (0, -4, -2, 6), \overrightarrow{b_2} = (2, 1, 1, -1), \overrightarrow{b_3} = (4, 0, 1, 1).$

8.8. **Пряма сума підпросторів.** Подати лінійний простір L у вигляді прямої суми $L = L_1 \bigoplus L_2$, де L_1 та L_2 — деякі ненульові лінійні підпростори L.

1) L – простір матриць порядку 2.
2) L – простір многочленів, степінь яких не перевищує 3.
3) L – простір геометричних векторів R^3.
4) L – простір симетричних матриць порядку 2.
5) L – простір многочленів степеня не вище 3 для яких $f'(0) = 0$.
6) L – простір усіх розв'язків рівняння $2x - y + 3z = 0$.
7) L – простір векторів з R^3, що ортогональні вектору $\overrightarrow{a} = (1, 2, -1)$.
8) L – простір матриць порядку 3, що мають нульовий слід.
9) L – простір усіх розв'язків системи $\begin{cases} x + y + z + t = 0, \\ 2x - y + 3z - 4t = 0. \end{cases}$
10) L – простір многочленів, степінь яких не перевищує 2.
11) L – простір діагональних матриць порядку 4.
12) L – арифметичний простір R^4.
13) L – простір матриць порядку 3 з нульовим першим рядком.
14) L – простір усіх розв'язків рівняння $2x + 3y - z = 0$.
15) L – простір многочленів, степінь яких не перевищує 4, для яких $f''(0) = 0$.
16) L – простір матриць порядку 4×2.
17) L – простір многочленів, степінь яких не перевищує 5.
18) L – простір геометричних векторів R^2.

19) L – простір симетричних матриць порядку 3.

20) L – простір многочленів степеня не вище 2 для яких $f'(0) = 0$.

21) L – простір усіх розв'язків рівняння $x - 5y + z = 0$.

22) L – простір геометричних векторів з R^3, що ортогональні вектору $\overrightarrow{a} = (7, 0, 5)$.

23) L – простір матриць порядку 2, що мають нульовий слід.

24) L – простір усіх розв'язків системи $\begin{cases} 2x + 3y - z + 2t = 0, \\ x - 2y + z - t = 0. \end{cases}$

25) L – простір многочленів, степінь яких не перевищує 5.

26) L – простір діагональних матриць порядку 3.

27) L – арифметичний простір R^5.

28) L – простір матриць порядку 4×3 з нульовим першим стовпчиком.

29) L – простір усіх розв'язків рівняння $-5x + 2y + z = 0$.

30) L – простір многочленів, степінь яких не перевищує 5, для яких $f'(0) = f''(0) = 0$.

9. Лінійні оператори

9.1. **Перевірка лінійності оператора.** Перевірити, чи є вказані оператори A та B лінійними. Для лінійних операторів вказати матрицю в тому ж базисі, в якому задано вектор $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

1) $A\overrightarrow{x} = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, -3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3)$,
$B\overrightarrow{x} = (2, -x_1 + x_3, x_2 + x_3)$.

2) $A\overrightarrow{x} = (5x_1 - 4x_2 + 3x_3, -x_1 + 2x_2 + 6x_3, x_1 + x_2 + x_3)$,
$B\overrightarrow{x} = (2x_1 - x_2, -x_1x_3, 7x_1 + x_2 - 5x_3)$.

3) $A\overrightarrow{x} = (2x_1 - 5x_2 + 7x_3, x_1 + 6x_2 + 2x_3, 2x_1 + 5x_2 - x_3)$,
$B\overrightarrow{x} = (x_1 - 7x_2 + x_3, x_1 + 6x_3 + 1, x_1 + 2x_2 - 9x_3)$.

4) $A\overrightarrow{x} = (4x_1 - 5x_2 + x_3, 3x_1 - x_2 + 7x_3, 2x_1 + 4x_2 + 5x_3)$,
$B\overrightarrow{x} = (2x_1^2 - x_3, x_2, x_1 - 3x_2 - x_3)$.

5) $A\overrightarrow{x} = (x_3, x_1 + x_2, -x_1 + x_2 - x_3)$,
$B\overrightarrow{x} = (x_1x_2 + x_3, x_1 + 4x_3, -2x_1 + 8x_2 + 5x_3)$.

6) $A\overrightarrow{x} = (-5x_1 - 6x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 + 6x_3, 5x_1 - x_2 + 2x_3),$
$B\overrightarrow{x} = (x_1 - x_2 - x_3, 5 - x_1 + x_3, 7 + x_1 + 8x_2 - x_3).$

7) $A\overrightarrow{x} = (9x_1 - 2x_2 + 7x_3, 3x_1 + 2x_2 + 5x_3, 6x_1 + 2x_2 + x_3),$
$B\overrightarrow{x} = (2x_1 - 3x_2, 0, x_3^3).$

8) $A\overrightarrow{x} = (x_1 + 4x_2 + x_3, x_1 - 2x_2 + 9x_3, 2x_1 - 8x_2 + 4x_3),$
$B\overrightarrow{x} = (5x_1 - 6x_2, x_2x_3, 9x_1 + 5x_2 - x_3).$

9) $A\overrightarrow{x} = (0, x_1, x_1 + 2x_2 + 3x_3),$
$B\overrightarrow{x} = (2 + x_1 - x_2, x_1 + x_3, x_1 + x_2 - 5x_3).$

10) $A\overrightarrow{x} = (4x_1 - x_2 - 8x_3, 3x_1 + 2x_2 + 9x_3, x_1 + x_3),$
$B\overrightarrow{x} = (1, 1, x_1).$

11) $A\overrightarrow{x} = (2x_1 - 5x_2 + x_3, 4x_1 + x_2 - 6x_3, x_1 + 8x_2 + 9x_3),$
$B\overrightarrow{x} = (x_1^2, 2x_1x_2, x_2^2).$

12) $A\overrightarrow{x} = (5x_1 - 6x_2 + 8x_3, 2x_1 + 7x_2 + x_3, 2x_1 + 5x_2 + x_3),$
$B\overrightarrow{x} = (2x_1 - x_3, -5x_1 + x_3x_2, x_1 + 6x_2 - 5x_3).$

13) $A\overrightarrow{x} = (8x_1 - 9x_2 + 4x_3, x_1 + 2x_2 + 7x_3, 2x_1 + 6x_2 - x_3),$
$B\overrightarrow{x} = (2 - x_1 - x_2, -x_1 + 8x_3, 8x_1 + 9x_2 - 6x_3).$

14) $A\overrightarrow{x} = (9x_1 - 7x_2 + 3x_3, 4x_1 + x_2 + 8x_3, 3x_1 + 5x_2 + 7x_3),$
$B\overrightarrow{x} = (2x_1x_2, x_1x_3, x_1x_3).$

15) $A\overrightarrow{x} = (5x_1 + 8x_2 + 3x_3, -8x_1 + 9x_2 + 6x_3, 5x_1 + x_2 + x_3),$
$B\overrightarrow{x} = (2 - x_1x_2, x_1 + x_3, x_1 + x_2 - x_3).$

16) $A\overrightarrow{x} = (x_1 - x_2 + 3x_3, -3x_1 + x_2 + 9x_3, x_1 + 4x_2 + x_3),$
$B\overrightarrow{x} = (3x_1 - x_2, -x_1 + 7x_3, 7x_1 + x_2 - 5x_3^2).$

17) $A\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_1), \quad B\overrightarrow{x} = (x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3).$

18) $A\overrightarrow{x} = (5x_1 + 8x_2 + x_3, 4x_1 + x_2 + 9x_3, 2x_1 + 5x_2 + 8x_3),$
$B\overrightarrow{x} = (2x_1, 0, 3).$

19) $A\overrightarrow{x} = (0, 0, 0), \quad B\overrightarrow{x} = (\frac{3}{x_1}, x_1 + 5x_3, x_1 + x_2 - 7x_3).$

20) $A\overrightarrow{x} = ((x_1 - 4)^2 - x_1^2 + 3x_3, -6x_1 + 2x_2 + 7x_3, x_1 + 4x_2 + 6x_3),$
$B\overrightarrow{x} = (0, 0, 1).$

21) $A\overrightarrow{x} = (x_1 - 7x_2 + 9x_3, -7x_1 + x_2 + 5x_3, 6x_1 - x_2 + x_3),$
$B\overrightarrow{x} = (2 - x_2, -x_1 + x_3, 7x_1x_2 - 5x_3).$

22) $A\overrightarrow{x} = ((x_1 - x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2, x_1 + 5x_2 + 6x_3, 7x_1 + x_2 + x_3),$
$B\overrightarrow{x} = (2x_1x_2, x_1x_3, x_1 + x_2 - 5x_3).$

23) $A\overrightarrow{x} = (x_1 - x_2 + 3x_3, -6x_1 + 7x_2 + 8x_3, 4x_1 + 5x_2 + x_3),$
$B\overrightarrow{x} = (8x_1 - x_2, -x_1 + x_3^4, 7x_1 + x_2 - 5x_3).$

24) $A\overrightarrow{x} = (-8x_1 - x_2 + 9x_3, 7x_1 + x_2 - 6x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3),$
$B\overrightarrow{x} = (2x_1 + x_2 + x_3, 1 - x_1 + x_3, 7x_1 + x_2 - 5x_3).$

25) $A\overrightarrow{x} = (5x_1 + x_2 + 9x_3, -2x_1 + 12x_2 + 61x_3, x_1 + 8x_2 + 9x_3),$
$B\overrightarrow{x} = (2, 0, x_1 + x_2 - 5x_3).$

26) $A\overrightarrow{x} = (6x_1 - 5x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + 9x_3, 8x_1 + 4x_2 + x_3),$
$B\overrightarrow{x} = (2x_1 - 2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 - 5x_3).$

27) $A\overrightarrow{x} = (3x_1 - x_2 + 5x_3, -4x_1 + x_2 + 3x_3, 2x_1 + 6x_2 + 9x_3),$
$B\overrightarrow{x} = (2x_1 - 4x_2, 8 - x_1x_3, x_1 + x_2 - x_3).$

28) $A\overrightarrow{x} = (x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3),$
$B\overrightarrow{x} = (x_1 - x_2, x_1 + x_3 - 1, x_3).$

29) $A\overrightarrow{x} = (0, x_1, x_1 + x_3),$ $B\overrightarrow{x} = (0, x_2^2 - x_3, 0).$

30) $A\overrightarrow{x} = (5x_1 - 9x_2, x_2 + x_3, x_3),$
$B\overrightarrow{x} = (2x_1, (x_1 + x_3)x_2, x_1 + x_2 - x_3).$

9.2. **Знаходження матриці лінійного оператора.** Доведіть лінійність оператора, виберіть у просторі який–небудь базис та знайдіть матрицю оператора в цьому базисі.

1) Оператор транспонування у просторі матриць порядку 2
2) У просторі многочленів, степінь яких не перевищує 3, оператор діє за правилом $A(y(x)) = 5y'' + 4y' + 3y$.
3) Оператор проектування площини на вісь OX.
4) В лінійному просторі матриць порядку 2 оператор переставляє рядки матриці місцями.

5) У просторі многочленів степінь яких не перевищує 3 оператор діє за формулою $A(y(x)) = -3y'' + 2y' + y$.
6) Оператор проектування площини на пряму $y = \sqrt{3}x$.
7) В лінійному просторі матриць порядку 2 оператор переставляє стовпчики матриці.
8) У просторі многочленів степінь яких не перевищує 3 оператор діє за формулою $A(y(x)) = y'' - 4y' + 2y$.
9) Оператор проектування площини на вісь OY.
10) В лінійному просторі матриць порядку 2 оператор змінює місцями елементи головної діагоналі.
11) У просторі многочленів степінь яких не перевищує 3 оператор діє за формулою $A(y(x)) = 7y'' + y' - 6y$.
12) Оператор симетрії площини відносно початку координат.
13) В лінійному просторі матриць порядку 2 оператор множення на матрицю $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.
14) В лінійному просторі матриць порядку 2 оператор змінює місцями елементи побічної діагоналі.
15) Оператор проектування площини на пряму $y = -x$.
16) В лінійному просторі матриць порядку 2 оператор замінює діагональні елементи на середнє арифметичне всіх елементів матриці.
17) В лінійному просторі матриць порядку 2 оператор замінює елементи побічної діагоналі на середнє арифметичне всіх елементів матриці.
18) В лінійному просторі матриць порядку 2 оператор виконує симетричне відображення елементів відносно побічної діагоналі.
19) Оператор проектування площини на пряму $y = x$.
20) Оператор проектування площини на пряму $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$.
21) Оператор проектування площини на пряму $y = -\sqrt{3}x$.
22) В лінійному просторі матриць порядку 2 оператор множення на матрицю $C = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

23) На координатній площині оператор відображає точки відносно прямої $y = x$.

24) Оператор повороту площини на кут $\frac{\pi}{2}$ проти годинникової стрілки навколо початку координат.

25) Оператор повороту площини на кут $\frac{\pi}{2}$ за годинниковою стрілкою навколо початку координат.

26) Оператор повороту площини на кут $\frac{\pi}{3}$ проти годинникової стрілки навколо початку координат.

27) В лінійному просторі матриць порядку 2 оператор множення на матрицю $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

28) Оператор повороту площини на кут $\frac{\pi}{4}$ проти годинникової стрілки навколо початку координат.

29) Оператор повороту площини на кут $\frac{\pi}{3}$ за годинниковою стрілкою навколо початку координат.

30) Оператор повороту площину на кут $\frac{\pi}{4}$ за годинниковою стрілкою навколо початку координат.

9.3. **Ядро та образ лінійного оператора.** В лінійному просторі L діє лінійний оператор $A : L \to L$. В базисі $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ задано матрицю цього оператора. Знайдіть ядро та образ оператора A.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & -7 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

12) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

14) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

15) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

16) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

17) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$;

18) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

19) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;

20) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

21) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

22) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

23) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

24) $\begin{pmatrix} 1 & -7 & -9 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

25) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

26) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 7 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

27) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

28) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 6 & 7 \\ 1 & -9 & -2 \end{pmatrix}$;

29) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

30) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

9.4. **Перетворення матриці лінійного оператора при переході до іншого базису.** Лінійний оператор, що перетворює простір R^3 в себе, задається в базисі $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0,1,0)$, $\overrightarrow{e_3} = (0,0,1)$ матрицею A. Знайдіть матрицю цього оператора в базисі з векторів $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$.

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (1,1,1), \overrightarrow{a_2} = (0,1,1), \overrightarrow{a_3} = (0,0,1)$.

2) $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (0,1,2), \overrightarrow{a_2} = (3,1,0), \overrightarrow{a_3} = (0,1,1)$.

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & -6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (1,1,0), \overrightarrow{a_2} = (1,2,0), \overrightarrow{a_3} = (-1,3,3)$.

4) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (1,1,1), \overrightarrow{a_2} = (1,0,0), \overrightarrow{a_3} = (1,-1,1)$.

5) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (-1,-1,1), \overrightarrow{a_2} = (-1,1,0), \overrightarrow{a_3} = (-1,-1,0)$.

6) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (-1,0,1), \overrightarrow{a_2} = (0,1,0), \overrightarrow{a_3} = (0,0,1)$.

7) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (1,1,0), \overrightarrow{a_2} = (0,1,1), \overrightarrow{a_3} = (0,0,2)$.

8) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (0,1,1), \overrightarrow{a_2} = (-1,1,0), \overrightarrow{a_3} = (0,1,2)$.

9) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{a_2} = (1, 2, 0), \overrightarrow{a_3} = (-1, 3, -3)$.

10) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (1, 1, 1), \overrightarrow{a_2} = (-1, 0, 0), \overrightarrow{a_3} = (1, -1, 1)$.

11) $A \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (-1, -1, 1), \overrightarrow{a_2} = (1, 1, 0), \overrightarrow{a_3} = (-1, 1, 0)$.

12) $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (-1, 0, 0), \overrightarrow{a_2} = (0, -1, 0), \overrightarrow{a_3} = (0, 0, 1)$.

13) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (1, 0, 0), \overrightarrow{a_2} = (0, -1, 0), \overrightarrow{a_3} = (-1, -1, -1)$.

14) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 9 \\ -2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (1, 1, 0), \overrightarrow{a_2} = (0, 1, 2), \overrightarrow{a_3} = (1, 0, 1)$.

15) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (1, 1, 1), \overrightarrow{a_2} = (1, 0, 0), \overrightarrow{a_3} = (1, 1, -1)$.

16) $A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (2, 1, 0), \overrightarrow{a_2} = (3, 1, 2), \overrightarrow{a_3} = (1, 2, -1)$.

17) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (-1, 2, 1), \overrightarrow{a_2} = (-1, -1, 2), \overrightarrow{a_3} = (2, 1, 0)$.

18) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (4, 1, 3), \overrightarrow{a_2} = (-1, 2, 1), \overrightarrow{a_3} = (3, 1, 1)$.

19) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (2, -1, 3), \overrightarrow{a_2} = (1, 1, 1), \overrightarrow{a_3} = (-1, 0, 1)$.

20) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (1, -1, 2), \overrightarrow{a_2} = (2, 3, 1,), \overrightarrow{a_3} = (0, 1, 1)$.

21) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (1, 3, -1), \overrightarrow{a_2} = (-1, 2, 1), \overrightarrow{a_3} = (0, 3, 1)$.

22) $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (-1, 2, 1), \overrightarrow{a_2} = (1, -1, 2), \overrightarrow{a_3} = (1, -1, 1)$.

23) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (1, 4, 1), \overrightarrow{a_2} = (0, 1, 1), \overrightarrow{a_3} = (2, -1, 0)$.

24) $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (1, -2, 1), \overrightarrow{a_2} = (-1, 2, 1), \overrightarrow{a_3} = (-1, 3, 1)$.

25) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (3, 1, 1), \overrightarrow{a_2} = (-1, 2, 1), \overrightarrow{a_3} = (0, 2, 1)$.

26) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (2, 1, -1), \overrightarrow{a_2} = (-1, 2, 1), \overrightarrow{a_3} = (3, 1, 1)$.

27) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (1, -2, 1), \overrightarrow{a_2} = (3, 1, 0), \overrightarrow{a_3} = (4, 0, 2)$.

28) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (2, -1, 1), \overrightarrow{a_2} = (1, 1, -1), \overrightarrow{a_3} = (1, 2, 1)$.

29) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (1, -1, 1), \overrightarrow{a_2} = (-1, 2, 3), \overrightarrow{a_3} = (1, 2, 1)$.

30) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = (1, 0, 1), \overrightarrow{a_2} = (2, 3, 1), \overrightarrow{a_3} = (1, 1, 0)$.

9.5. **Власні числа та власні вектори лінійного оператора.** Знайдіть власні числа та власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею у певному базисі:

1) $\begin{pmatrix} -11 & 6 & 3 \\ -8 & 5 & 2 \\ -22 & 12 & 6 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -5 & -2 & -2 \\ 14 & 6 & 4 \\ -10 & -5 & -3 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 10 & 6 & 8 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -14 & -6 & -4 \\ 10 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -6 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 9 & 5 & 5 \\ -22 & -12 & -10 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -8 & -9 & -14 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 7 & 2 \\ -9 & -18 & -9 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} -14 & -32 & -10 \\ 6 & 14 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

12) $\begin{pmatrix} -23 & -50 & -16 \\ 9 & 20 & 6 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} -11 & -8 & -22 \\ 6 & 5 & 12 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; 19) $\begin{pmatrix} -32 & -10 & -15 \\ -36 & -15 & -18 \\ 94 & 32 & 45 \end{pmatrix}$; 25) $\begin{pmatrix} 20 & 44 & 16 \\ -6 & -14 & -4 \\ -12 & -24 & -12 \end{pmatrix}$;

14) $\begin{pmatrix} -5 & -10 & 10 \\ 6 & 11 & -12 \\ 3 & 5 & -6 \end{pmatrix}$; 20) $\begin{pmatrix} 45 & 94 & 32 \\ -15 & -32 & -10 \\ -18 & -36 & -15 \end{pmatrix}$; 26) $\begin{pmatrix} -4 & -6 & -6 \\ -3 & -7 & -2 \\ 15 & 30 & 15 \end{pmatrix}$;

15) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 21) $\begin{pmatrix} 39 & 82 & 26 \\ -15 & -32 & -10 \\ -9 & -18 & -6 \end{pmatrix}$; 27) $\begin{pmatrix} -4 & 10 & 0 \\ -3 & 7 & 0 \\ 9 & -15 & -2 \end{pmatrix}$;

16) $\begin{pmatrix} -4 & -10 & 10 \\ 12 & 22 & -24 \\ 9 & 15 & -17 \end{pmatrix}$; 22) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 28) $\begin{pmatrix} -9 & 20 & 7 \\ -6 & 13 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

17) $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 12 & 6 & 6 \\ -22 & -8 & -10 \end{pmatrix}$; 23) $\begin{pmatrix} 40 & 82 & 26 \\ -15 & -31 & -10 \\ -9 & -18 & -5 \end{pmatrix}$; 29) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

18) $\begin{pmatrix} -32 & -10 & -15 \\ -6 & 0 & -3 \\ 74 & 22 & 35 \end{pmatrix}$; 24) $\begin{pmatrix} 18 & 40 & 14 \\ -6 & -14 & -4 \\ -9 & -18 & -9 \end{pmatrix}$; 30) $\begin{pmatrix} -4 & -10 & 10 \\ 9 & 17 & -18 \\ 6 & 10 & -11 \end{pmatrix}$.

9.6. **Оператори простої структури.** Задано матрицю лінійного оператора в деякому базисі. Знайдить алгебричні та геометричні кратності власних чисел. З'ясуйте, чи є наведені оператори операторами простої структури.

1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -8 & 3 & 3 & 1 \\ 11 & -5 & -5 & 2 \\ 10 & -6 & -7 & 5 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} -20 & 9 & 10 & -2 \\ -52 & 24 & 26 & -6 \\ -8 & 3 & 4 & 0 \\ -44 & 19 & 21 & -3 \end{pmatrix}$; 17) $\begin{pmatrix} 25 & -11 & -13 & 4 \\ 58 & -26 & -32 & 10 \\ 11 & -5 & -5 & 2 \\ 53 & -25 & -30 & 11 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 7 & -4 & -5 & 3 \\ 2 & -3 & -5 & 5 \\ 16 & -8 & -9 & 4 \\ 25 & -15 & -19 & 11 \end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix} -15 & 7 & 8 & -2 \\ -24 & 11 & 10 & -2 \\ -21 & 10 & 14 & -4 \\ -43 & 20 & 24 & -6 \end{pmatrix}$; 18) $\begin{pmatrix} 25 & -11 & -13 & 4 \\ 66 & -30 & -38 & 12 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 49 & -23 & -27 & 10 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -3 & 2 \\ 7 & -5 & -6 & 5 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} -20 & 9 & 10 & -2 \\ -44 & 20 & 20 & -4 \\ -16 & 7 & 10 & -2 \\ -48 & 21 & 24 & -4 \end{pmatrix}$; 19) $\begin{pmatrix} 14 & -6 & -7 & 2 \\ 44 & -20 & -26 & 8 \\ -5 & 3 & 6 & -2 \\ 25 & -11 & -12 & 4 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} -18 & 9 & 11 & -3 \\ -44 & 22 & 25 & -7 \\ -13 & 6 & 9 & -2 \\ -47 & 22 & 27 & -6 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} -20 & 9 & 10 & -2 \\ -52 & 24 & 26 & -6 \\ -8 & 3 & 4 & 0 \\ -44 & 19 & 21 & -3 \end{pmatrix}$; 20) $\begin{pmatrix} 17 & -7 & -7 & 2 \\ 50 & -22 & -26 & 8 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 37 & -17 & -18 & 7 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} -14 & 7 & 8 & -2 \\ -32 & 16 & 16 & -4 \\ -13 & 6 & 9 & -2 \\ -39 & 18 & 21 & -4 \end{pmatrix}$; 13) $\begin{pmatrix} -20 & 9 & 10 & -2 \\ -66 & 30 & 34 & -8 \\ 6 & -3 & -4 & 2 \\ -37 & 16 & 17 & -2 \end{pmatrix}$; 21) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 & 0 \\ 20 & -8 & -8 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 17 & -7 & -6 & 2 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} -14 & 7 & 8 & -2 \\ -46 & 22 & 24 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -32 & 15 & 17 & -3 \end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix} -15 & 7 & 8 & -2 \\ -46 & 21 & 24 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -32 & 15 & 17 & -4 \end{pmatrix}$; 22) $\begin{pmatrix} 25 & -11 & -13 & 4 \\ 50 & -22 & -26 & 8 \\ 19 & -9 & -11 & 4 \\ 57 & -27 & -33 & 12 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} -24 & 11 & 13 & -3 \\ -56 & 26 & 29 & -7 \\ -16 & 7 & 10 & -2 \\ -56 & 25 & 30 & -6 \end{pmatrix}$; 15) $\begin{pmatrix} 14 & -6 & -7 & 2 \\ 48 & -22 & -26 & 8 \\ -9 & 5 & 6 & -2 \\ 23 & -10 & -12 & 4 \end{pmatrix}$; 23) $\begin{pmatrix} 25 & -11 & -13 & 4 \\ 58 & -26 & -32 & 10 \\ 11 & -5 & -5 & 2 \\ 53 & -25 & -30 & 11 \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} -19 & 9 & 11 & -3 \\ -44 & 21 & 25 & -7 \\ -13 & 6 & 8 & -2 \\ -47 & 22 & 27 & -7 \end{pmatrix}$; 16) $\begin{pmatrix} 25 & -11 & -13 & 4 \\ 70 & -32 & -38 & 12 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 47 & -22 & -27 & 10 \end{pmatrix}$; 24) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 4 & -2 \\ 11 & -5 & -5 & 2 \\ 13 & -5 & -6 & 3 \end{pmatrix}$;

25) $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 5 & -2 \\ -10 & 8 & 10 & -4 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$; 27) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$; 29) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 14 & -7 & -8 & 4 \\ -19 & 9 & 12 & -3 \\ -7 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

26) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 & 0 \\ 20 & -7 & -8 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 17 & -7 & -6 & 3 \end{pmatrix}$; 28) $\begin{pmatrix} 15 & -6 & -7 & 2 \\ 48 & -21 & -26 & 8 \\ -9 & 5 & 7 & -2 \\ 23 & -10 & -12 & 5 \end{pmatrix}$; 30) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 2 \\ 24 & -13 & -16 & 8 \\ -14 & 6 & 8 & -1 \\ 8 & -7 & -9 & 8 \end{pmatrix}$.

9.7. **Жорданова нормальна форма матриці.** Зведіть матрицю до жорданової нормальної форми та вкажіть відповідний жорданів базис:

1) $\begin{pmatrix} -8 & 2 & 5 \\ -8 & 4 & 4 \\ -20 & 4 & 12 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; 13) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} -12 & 7 & 10 \\ 4 & 0 & -4 \\ -16 & 8 & 14 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} -13 & 15 & 7 \\ -6 & 7 & 3 \\ -10 & 12 & 6 \end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix} 9 & -2 & -3 \\ 17 & -3 & -7 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -18 & -7 & -22 \\ -1 & -2 & -1 \\ 18 & 8 & 22 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 8 & 7 & -12 \\ 4 & 4 & -5 \end{pmatrix}$; 15) $\begin{pmatrix} -3 & 5 & -5 \\ 1 & 6 & -9 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} -6 & -13 & 46 \\ -9 & -14 & 54 \\ -4 & -7 & 26 \end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix} 11 & -6 & 12 \\ 4 & 0 & 4 \\ -7 & 5 & -8 \end{pmatrix}$; 16) $\begin{pmatrix} -6 & 25 & 17 \\ -6 & 23 & 13 \\ 7 & -25 & -13 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 21 & -6 & -11 \\ 18 & -3 & -9 \\ 24 & -8 & -13 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} -15 & 9 & 17 \\ -1 & -1 & 1 \\ -12 & 9 & 14 \end{pmatrix}$; 17) $\begin{pmatrix} -22 & -7 & -11 \\ 25 & 9 & 13 \\ 25 & 8 & 12 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} -12 & 4 & -7 \\ -2 & 0 & -1 \\ 20 & -7 & 12 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} -6 & 3 & 8 \\ -4 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$; 18) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

19) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 23) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 27) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & -4 & -3 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$;

20) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; 24) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$; 28) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

21) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; 25) $\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$; 29) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

22) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; 26) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 30) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

9.8. **Обчислення степеня матриці.** За допомогою зведення матриці A до діагонального вигляду обчислити A^m:

1) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 42 & 29 & -18 \\ 72 & 48 & -33 \end{pmatrix}$, $m = 100$; 5) $\begin{pmatrix} -18 & -7 & -22 \\ -1 & -2 & -1 \\ 18 & 8 & 22 \end{pmatrix}$, $m = 20$;

2) $\begin{pmatrix} 16 & 10 & -8 \\ 15 & 11 & -6 \\ 54 & 36 & -25 \end{pmatrix}$, $m = 120$; 6) $\begin{pmatrix} -15 & 9 & 17 \\ -1 & -1 & 1 \\ -12 & 9 & 14 \end{pmatrix}$, $m = 25$;

3) $\begin{pmatrix} -9 & 20 & 7 \\ -6 & 13 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $m = 50$; 7) $\begin{pmatrix} -11 & -6 & -6 \\ 26 & 14 & 12 \\ -14 & -7 & -5 \end{pmatrix}$, $m = 30$;

4) $\begin{pmatrix} -7 & 10 & -2 \\ -4 & 6 & -1 \\ -4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$, $m = 40$; 8) $\begin{pmatrix} 52 & 34 & -24 \\ -93 & -61 & 42 \\ -18 & -12 & 7 \end{pmatrix}$, $m = 65$;

9) $\begin{pmatrix} 34 & 22 & -16 \\ -39 & -25 & 18 \\ 18 & 12 & -9 \end{pmatrix}, \quad m = 93;$

10) $\begin{pmatrix} 102 & 66 & -48 \\ -117 & -75 & 54 \\ 54 & 36 & -27 \end{pmatrix}, \quad m = 26;$

11) $\begin{pmatrix} -5 & 3 & 9 \\ 68 & -42 & -123 \\ -26 & 16 & 47 \end{pmatrix}, \quad m = 60;$

12) $\begin{pmatrix} 7 & -3 & -9 \\ 64 & -40 & -117 \\ -18 & 12 & 35 \end{pmatrix}, \quad m = 37;$

13) $\begin{pmatrix} 13 & -6 & -18 \\ 62 & -39 & -114 \\ -14 & 10 & 29 \end{pmatrix}, \quad m = 42;$

14) $\begin{pmatrix} -4 & 10 & 0 \\ -3 & 7 & 0 \\ 9 & -15 & -2 \end{pmatrix}, \quad m = 60;$

15) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad m = 100;$

16) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad m = 150;$

17) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad m = 20;$

18) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad m = 25;$

19) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad m = 20;$

20) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m = 20;$

21) $\begin{pmatrix} 0 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m = 32;$

22) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m = 35;$

23) $\begin{pmatrix} -12 & -5 & 34 \\ -2 & -3 & 2 \\ -6 & -3 & 16 \end{pmatrix}, \quad m = 42;$

24) $\begin{pmatrix} 17 & 4 & -8 \\ 8 & 3 & -6 \\ 32 & 8 & -16 \end{pmatrix}, \quad m = 24;$

25) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad m = 200;$

26) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad m = 87;$

27) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad m = 37;$

28) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m = 43;$

29) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m = 60;$

30) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad m = 99;$

10. Унітарний та евклідів простори

10.1. **Перевірка означення скалярного добутку.** Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом.

1) L – простір дійсних многочленів, степінь яких не перевищує 2. Для довільних $f, g \in L$ визначимо $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$.
2) L – простір матриць порядку 2. Для довільних $f = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & u_1 \end{pmatrix}$ та $g = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & u_2 \end{pmatrix}$ визначимо $(f, g) = x_1x_2 + y_1y_2$.
3) $L = R^3$. Для довільних $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in L$ визначимо $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = |\overrightarrow{x}||\overrightarrow{y}|$.
4) L – простір дійсних многочленів, степінь яких не перевищує 3. Для довільних $f, g \in L$ визначимо $(f, g) = \int\limits_0^1 f'(x)g'(x)dx$.
5) L – простір матриць порядку 2. Для довільних $f = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & u_1 \end{pmatrix}$ та $g = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & u_2 \end{pmatrix}$ визначимо $(f, g) = x_1x_2 + u_1u_2$.
6) $L = R^3$. Для довільних $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in L$ визначимо $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = |\overrightarrow{x}||\overrightarrow{y}|\sin\alpha$, де α – кут між векторами.

7) L – простір дійсних многочленів, степінь яких не перевищує 2. Для довільних $f, g \in L$ визначимо $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx + \int\limits_0^1 f'(x)g'(x)dx$.

8) L – простір матриць порядку 2. Для довільних $f = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & u_1 \end{pmatrix}$ та $g = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & u_2 \end{pmatrix}$ визначимо $(f, g) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + u_1u_2$.

9) $L = R^3$. Для довільних $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in L$ визначимо $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2|\overrightarrow{x}||\overrightarrow{y}|\cos\alpha$, де α – кут між векторами.

10) L – простір дійсних многочленів, степінь яких не перевищує 3. Для довільних $f, g \in L$ визначимо $(f, g) = \int\limits_0^1 f'(x)g(x)dx + \int\limits_0^1 f(x)g'(x)dx$.

11) L – простір матриць порядку 2. Для довільних $f = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & u_1 \end{pmatrix}$ та $g = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & u_2 \end{pmatrix}$ визначимо $(f, g) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1$.

12) $L = R^3$. Для довільних $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in L$ визначимо $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = |\overrightarrow{x}|^2 + |\overrightarrow{y}|^2$.

13) L – простір дійсних многочленів, степінь яких не перевищує 2. Для довільних $f, g \in L$ визначимо $(f, g) = f(0)g(0)$.

14) L – простір матриць порядку 2. Для довільних $f = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & u_1 \end{pmatrix}$ та $g = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & u_2 \end{pmatrix}$ визначимо $(f, g) = \det(f \cdot g)$.

15) $L = R^3$. Для довільних $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in L$ визначимо $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{x}||\overrightarrow{y}|\cos 2\alpha$, де α – кут між векторами.

16) L – простір дійсних многочленів, степінь яких не перевищує 2. Для довільних $f = a_1x^2 + b_1x + c_1$ та $g = a_2x^2 + b_2x + c_2$ визначимо $(f, g) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$.

17) L – простір матриць порядку 2. Для довільних $f = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & u_1 \end{pmatrix}$ та $g = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & u_2 \end{pmatrix}$ визначимо $(f, g) = tr(f) \cdot tr(g)$, де $tr(f)$ – сума елементів головної діагоналі.

18) $L = R^3$. Для довільних $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in L$ визначимо $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \max\{|\overrightarrow{x}|; |\overrightarrow{y}|\}$.

19) L – простір дійсних многочленів, степінь яких не перевищує 2. Для довільних $f, g \in L$ визначимо $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx + f(0)g(0)$.

20) L – простір матриць порядку 2. Для довільних $f = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & u_1 \end{pmatrix}$ та $g = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & u_2 \end{pmatrix}$ визначимо $(f, g) = tr(f \cdot g)$.

21) $L = R^3$. Для довільних $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in L$ визначимо $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \sqrt{|\overrightarrow{x}||\overrightarrow{y}|}$.

22) L – простір дійсних многочленів, степінь яких не перевищує 4 та $f(-1) = f(1) = 0$. Для довільних $f, g \in L$ визначимо $(f, g) = \int\limits_0^1 f'(x)g'(x)dx$.

23) L – простір матриць порядку 2. Для довільних $f = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & u_1 \end{pmatrix}$ та $g = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & u_2 \end{pmatrix}$ визначимо $(f, g) = x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2 + z_1z_2 + z_1u_2 + z_2u_1 + u_1u_2$.

24) $L = R^3$. Для довільних $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in L$ визначимо $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = |\overrightarrow{x}| + |\overrightarrow{y}|$.

25) L – простір дійсних многочленів, степінь яких не перевищує 2 . Для довільних $f, g \in L$ визначимо $(f, g) = \max\limits_{x \in [0,1]} |f(x)g(x)|$.

26) L – простір матриць порядку 2. Для довільних $f = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & u_1 \end{pmatrix}$ та $g = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & u_2 \end{pmatrix}$ визначимо $(f, g) = max\{x_1x_2;\ y_1y_2;\ z_1z_2;\ u_1u_2\}$.

27) $L = R^3$. Для довільних $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in L$ визначимо $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \sqrt{|\overrightarrow{x}|^2 + |\overrightarrow{y}|^2}$.

28) L – простір дійсних многочленів, степінь яких не перевищує 2. Для довільних $f, g \in L$ визначимо $(f, g) = \int\limits_0^1 x^2 f(x)g(x)dx$.

29) L – простір матриць порядку 2. Для довільних $f = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & u_1 \end{pmatrix}$ та $g = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & u_2 \end{pmatrix}$ визначимо $(f, g) = \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + z_1^2z_2^2 + u_1^2u_2^2}$.

30) $L = R^2$. Для довільних $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in L$ визначимо $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = |\overrightarrow{x}||\overrightarrow{y}|\cos(\frac{\pi}{3} + \alpha)$, де α – кут між векторами.

10.2. **Скалярний добуток та матриця Грама.** В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Потрібно:

1) Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$.
2) Дослідити на лінійну залежність вектори $\overrightarrow{f_i}$.

1) $\overrightarrow{f_1} = (1; 2; -3)$, $\overrightarrow{f_2} = (2; -1; 1)$, $\overrightarrow{f_3} = (0; 1; 2)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

2) $\overrightarrow{f_1} = (-i; 1; 0)$, $\overrightarrow{f_2} = (1; 0; 0)$, $\overrightarrow{f_3} = (1 + 2i; -2 + i; 1)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$.

3) $\overrightarrow{f_1} = (1; 2; 3)$, $\overrightarrow{f_2} = (1; 0; 1)$, $\overrightarrow{f_3} = (-1; 1; 0)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 7x_3y_3$.

4) $\overrightarrow{f_1} = (1; 0; 2)$, $\overrightarrow{f_2} = (-1; 2; 1)$, $\overrightarrow{f_3} = (0; 3; 0)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

5) $\overrightarrow{f_1} = (1;0;-1)$, $\overrightarrow{f_2} = (2i;0;1)$, $\overrightarrow{f_3} = (-1;1+i;0)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}.$

6) $\overrightarrow{f_1} = (2;i-3)$, $\overrightarrow{f_2} = (2i;0)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}.$

7) $\overrightarrow{f_1} = (3;1;2)$, $\overrightarrow{f_2} = (-2;1;3)$, $\overrightarrow{f_3} = (2;-1;1)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3.$

8) $\overrightarrow{f_1} = (1+i;0;1)$, $\overrightarrow{f_2} = (2;0;1)$, $\overrightarrow{f_3} = (i;-i;0)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}.$

9) $\overrightarrow{f_1} = (2;-3)$, $\overrightarrow{f_2} = (-2i;1-2i)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}.$

10) $\overrightarrow{f_1} = (0;-2;1)$, $\overrightarrow{f_2} = (1;0;-1)$, $\overrightarrow{f_3} = (2;3;0)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3.$

11) $\overrightarrow{f_1} = (-1;1+i;-1)$, $\overrightarrow{f_2} = (2;0;i)$, $\overrightarrow{f_3} = (0;i;2)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}.$

12) $\overrightarrow{f_1} = (8-i;0)$, $\overrightarrow{f_2} = (2;-3i)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}.$

13) $\overrightarrow{f_1} = (1;-1;1)$, $\overrightarrow{f_2} = (2;0;1)$, $\overrightarrow{f_3} = (-1;-1;2)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3.$

14) $\overrightarrow{f_1} = (-1;1;8)$, $\overrightarrow{f_2} = (4i;0;5)$, $\overrightarrow{f_3} = (0;0;3i)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}.$

15) $\overrightarrow{f_1} = (0;1+i)$, $\overrightarrow{f_2} = (2-i;0)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}.$

16) $\overrightarrow{f_1} = (4;-1;0)$, $\overrightarrow{f_2} = (1;5;1)$, $\overrightarrow{f_3} = (2;0;-1)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3.$

17) $\overrightarrow{f_1} = (4;0;5)$, $\overrightarrow{f_2} = (2;2;i)$, $\overrightarrow{f_3} = (1;0;2)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}.$

18) $\overrightarrow{f_1} = (2;1-i)$, $\overrightarrow{f_2} = (0;5i)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}.$

19) $\overrightarrow{f_1} = (0;0;-3)$, $\overrightarrow{f_2} = (5;0;-1)$, $\overrightarrow{f_3} = (2;0;1)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3.$

20) $\overrightarrow{f_1} = (2;1;0)$, $\overrightarrow{f_2} = (i;0;2i)$, $\overrightarrow{f_3} = (-1+i;2;0)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}.$

21) $\overrightarrow{f_1} = (3;-2i)$, $\overrightarrow{f_2} = (1+i;2-i)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}.$

22) $\overrightarrow{f_1} = (2;1;2)$, $\overrightarrow{f_2} = (-1;-3;1)$, $\overrightarrow{f_3} = (2;-1;2)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3.$

23) $\overrightarrow{f_1} = (0;0;1+i)$, $\overrightarrow{f_2} = (1-i;i;0)$, $\overrightarrow{f_3} = (4;0;2)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}.$

24) $\overrightarrow{f_1} = (1-i;2i-1)$, $\overrightarrow{f_2} = (0;2)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}.$

25) $\overrightarrow{f_1} = (4;1;-1)$, $\overrightarrow{f_2} = (2;1;2)$, $\overrightarrow{f_3} = (0;1;0)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3.$

26) $\overrightarrow{f_1} = (3;-2;1+i)$, $\overrightarrow{f_2} = (-1;0;2i)$, $\overrightarrow{f_3} = (1;0;1)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}.$

27) $\overrightarrow{f_1} = (0;1+i)$, $\overrightarrow{f_2} = (1+i;2i)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}.$

28) $\overrightarrow{f_1} = (10;0;1)$, $\overrightarrow{f_2} = (0;7;1)$, $\overrightarrow{f_3} = (1;-1;1)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3.$

29) $\overrightarrow{f_1} = (1;-2i)$, $\overrightarrow{f_2} = (i;2)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}.$

30) $\overrightarrow{f_1} = (1;1;0)$, $\overrightarrow{f_2} = (-1;1;0)$, $\overrightarrow{f_3} = (0;0;1)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}.$

10.3. **Ортогоналізація системи векторів за Грамом-Шмідтом.** Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою наведених векторів.

1) $\overrightarrow{a_1} = (0;2;-3;1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1;3;4;-1)$, $\overrightarrow{a_3} = (1;5;1;0)$;

2) $\overrightarrow{a_1} = (1;1;-1;2)$, $\overrightarrow{a_2} = (4;-1;2;4)$, $\overrightarrow{a_3} = (0;1;3;0)$;

3) $\overrightarrow{a_1} = (2;-2;1;1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1;-3;5;0)$, $\overrightarrow{a_3} = (3;-2;1;1)$;

4) $\overrightarrow{a_1} = (1;-1;0;4)$, $\overrightarrow{a_2} = (2;1;2;1)$, $\overrightarrow{a_3} = (3;0;2;5)$;

5) $\overrightarrow{a_1} = (3;-2;1;2)$, $\overrightarrow{a_2} = (2;0;4;-1)$, $\overrightarrow{a_3} = (-4;1;1;6)$;

6) $\overrightarrow{a_1} = (4;0;1;-2)$, $\overrightarrow{a_2} = (3;1;-5;4)$, $\overrightarrow{a_3} = (1;-1;6;-3)$;

7) $\overrightarrow{a_1} = (-1;-3;5;3)$, $\overrightarrow{a_2} = (-2;2;1;3)$, $\overrightarrow{a_3} = (2;-1;2;7)$;

8) $\overrightarrow{a_1} = (5;-4;1;1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1;0;5;1)$, $\overrightarrow{a_3} = (-1;-1;2;3)$;

9) $\overrightarrow{a_1} = (0;2;1;4)$, $\overrightarrow{a_2} = (3;0;-5;6)$, $\overrightarrow{a_3} = (3;2;-4;10)$;

10) $\overrightarrow{a_1} = (-3;2;1;0)$, $\overrightarrow{a_2} = (-1;1;1;1)$, $\overrightarrow{a_3} = (2;-4;3;5)$;

11) $\overrightarrow{a_1} = (1;1;3;1)$, $\overrightarrow{a_2} = (2;1;1;1)$, $\overrightarrow{a_3} = (3;-1;0;2)$;

12) $\overrightarrow{a_1} = (2;-2;3;6)$, $\overrightarrow{a_2} = (1;0;-2;1)$, $\overrightarrow{a_3} = (4;2;3;-3)$;

13) $\overrightarrow{a_1} = (6;-1;0;1)$, $\overrightarrow{a_2} = (2;3;4;5)$, $\overrightarrow{a_3} = (1;-5;2;1)$;

14) $\overrightarrow{a_1} = (0;0;1;1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1;0;1;0)$, $\overrightarrow{a_3} = (4;1;7;0)$;

15) $\overrightarrow{a_1} = (1;1;1;1)$, $\overrightarrow{a_2} = (2;0;1;1)$, $\overrightarrow{a_3} = (1;-1;0;0)$;

16) $\overrightarrow{a_1} = (6;1;1;-2)$, $\overrightarrow{a_2} = (-2;3;4;-1)$, $\overrightarrow{a_3} = (1;-4;2;1)$;

17) $\overrightarrow{a_1} = (7;-2;1;4)$, $\overrightarrow{a_2} = (1;1;-1;-1)$, $\overrightarrow{a_3} = (3;-2;3;1)$;

18) $\overrightarrow{a_1} = (4;0;1;-3)$, $\overrightarrow{a_2} = (4;3;2;1)$, $\overrightarrow{a_3} = (-2;1;5;1)$;

19) $\overrightarrow{a_1} = (2;-3;1;1)$, $\overrightarrow{a_2} = (-5;2;3;1)$, $\overrightarrow{a_3} = (1;-1;2;5)$;

20) $\overrightarrow{a_1} = (0;-2;1;0)$, $\overrightarrow{a_2} = (3;0;5;2)$, $\overrightarrow{a_3} = (1;-6;4;0)$;

21) $\overrightarrow{a_1} = (1;-4;2;8)$, $\overrightarrow{a_2} = (2;0;3;0)$, $\overrightarrow{a_3} = (4;1;6;-5)$;

22) $\overrightarrow{a_1} = (-4; 2; 1; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; -3; 3; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (0; 0; 1; -7)$;

23) $\overrightarrow{a_1} = (6; -1; 0; 5)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 4; -1; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (9; -1; 3; 4)$;

24) $\overrightarrow{a_1} = (2; -1; 2; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; 0; 6; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (4; 3; 2; 1)$;

25) $\overrightarrow{a_1} = (2; -2; 5; 0)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; 2; 3; 4)$, $\overrightarrow{a_3} = (4; 3; 2; 1)$;

26) $\overrightarrow{a_1} = (5; 5; 1; 4)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 2; 2; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (7; 7; 3; 5)$;

27) $\overrightarrow{a_1} = (-4; 2; 1; 8)$, $\overrightarrow{a_2} = (6; 3; 2; -6)$, $\overrightarrow{a_3} = (4; -1; 3; 6)$;

28) $\overrightarrow{a_1} = (1; -2; 3; 4)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 0; 5; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (4; -1; 2; 5)$;

29) $\overrightarrow{a_1} = (6; 5; 2; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; 1; 2; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (2; -2; 2; 3)$;

30) $\overrightarrow{a_1} = (0; -1; 5; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; 1; 2; -1)$, $\overrightarrow{a_3} = (6; 1; 1; 9)$;

10.4. **Ортогональне доповнення до підпростору.** а) Нехай L - лінійна оболонка вказаних у задачі векторів, координати яких дано в деякому ортонормованому базисі. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L.

1) $\overrightarrow{a_1} = (1; -2; 3; 4)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 0; 5; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (4; -1; 2; 5)$;

2) $\overrightarrow{a_1} = (5; 5; -1; 6)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 3; 4; 0)$;

3) $\overrightarrow{a_1} = (6; 4; 3; 1)$;

4) $\overrightarrow{a_1} = (-4; 5; 2; 6)$, $\overrightarrow{a_2} = (7; 3; 1; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (4; 3; 0; 5)$;

5) $\overrightarrow{a_1} = (3; 7; 1; 4)$, $\overrightarrow{a_2} = (-5; 2; 6; 8)$;

6) $\overrightarrow{a_1} = (8; 1; -5; 4)$;

7) $\overrightarrow{a_1} = (1; 3; 2; 8)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; -1; 5; 6)$, $\overrightarrow{a_3} = (6; 2; 5; 1)$;

8) $\overrightarrow{a_1} = (1; 0; 6; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (-4; 3; 2; 5)$;

9) $\overrightarrow{a_1} = (-2; -1; 3; 1)$;

10) $\overrightarrow{a_1} = (3; 2; -1; 4)$, $\overrightarrow{a_2} = (5; 2; 1; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (0; -1; 1; 3)$;

11) $\overrightarrow{a_1} = (3; 1; 5; 8)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 4; 0; 2)$;

12) $\overrightarrow{a_1} = (1; 1; 0; 2)$;

13) $\overrightarrow{a_1} = (1; 3; 2; 0)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; 5; 1; 8)$, $\overrightarrow{a_3} = (6; 3; 0; -2)$;

14) $\overrightarrow{a_1} = (1; -5; 3; 7)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 5; 2; 4)$;

15) $\overrightarrow{a_1} = (3; 1; 2; -1)$;

16) $\overrightarrow{a_1} = (3; 5; 1; 4)$, $\overrightarrow{a_2} = (-2; 2; 5; 0)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 1; -1; 7)$;

17) $\overrightarrow{a_1} = (1; 2; 1; 3)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; 5; 1; 7)$;

18) $\overrightarrow{a_1} = (4; 3; 1; -2)$;

19) $\overrightarrow{a_1} = (5; 7; 6; -1)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; 2; 0; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (6; 4; 2; 7)$;

20) $\overrightarrow{a_1} = (1; 4; 3; 2)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; -1; 5; 0)$;

21) $\overrightarrow{a_1} = (3; 2; -1; -1)$;

22) $\overrightarrow{a_1} = (7; 1; 3; 4)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; -1; 5; 0)$, $\overrightarrow{a_3} = (4; 6; -1; 3)$;

23) $\overrightarrow{a_1} = (0; 1; 1; 5)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 8; 3; 4)$;

24) $\overrightarrow{a_1} = (7; -2; 0; 1)$;

25) $\overrightarrow{a_1} = (2; 6; 3; 3)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; 0; 1; -1)$, $\overrightarrow{a_3} = (2; 5; 3; 7)$;

26) $\overrightarrow{a_1} = (7; 3; 2; -1)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; 0; 5; 8)$;

27) $\overrightarrow{a_1} = (0; 1; 0; 2)$;

28) $\overrightarrow{a_1} = (-4; 1; 2; 6)$, $\overrightarrow{a_2} = (-5; -1; 2; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (0; 1; 7; 4)$;

29) $\overrightarrow{a_1} = (5; 5; 1; 3)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; 2; 1; 0)$;

30) $\overrightarrow{a_1} = (2; 1; 5; 7)$.

б) Ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається системою рівнянь. Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L.

1) $2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0,$
$3x_1 + 2x_2 - x_4 = 0,$
$3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0.$

2) $2x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 0.$

3) $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0,$
$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0.$

4) $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$
$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 0,$
$2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0.$

5) $3x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0.$

6) $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0,$
$3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0.$

7) $x_1 + x_2 - x_3 = 0,$
$5x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0,$
$4x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0.$

8) $x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0.$

9) $4x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0,$
$3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0.$

10) $2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0,$
$x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0,$
$3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0.$

11) $4x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0.$

12) $3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 0,$
$4x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0.$

13) $4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0,$
$3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0,$
$8x_1 + x_2 - x_3 - 6x_4 = 0.$

14) $4x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0.$

15) $5x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 0,$
$2x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_4 = 0.$

16) $5x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0,$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0,$
$3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0.$

17) $3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0.$

18) $2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0,$
$x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0.$

19) $2x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0,$
$4x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0,$
$2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 0.$

20) $5x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 4x_4 = 0.$

21) $5x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0,$
$9x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 0.$

22) $7x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0,$
$x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0,$
$6x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0.$

23) $-2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0.$

24) $2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0,$
$5x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0.$

25) $6x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0,$
$3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0,$
$2x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 0.$

26) $-4x_1 - x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0.$

27) $x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0,$
$-2x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0.$

28) $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$
$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0,$
$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0.$

29) $5x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 0.$

30) $-4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0,$
$5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0.$

10.5. **Проекція вектора на лінійний підпростір, кут та відстань між вектором та підпростором.** Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованом базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$. А також визначити кут та відстань між $\overrightarrow{x}$ та L.

1) $\overrightarrow{a_1} = (1; 1; 0; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; -1; 3; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (-3; 0; 2; 4)$, $\overrightarrow{x} = (3; 2; 5; 1)$,

2) $\overrightarrow{a_1} = (1; 2; -1; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; 1; 2; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 4; 5; 3)$, $\overrightarrow{x} = (-1; 0; 3; 1)$,

3) $\overrightarrow{a_1} = (2; 0; 0; 3)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; -2; 1; 4)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; -5; 1; 0)$, $\overrightarrow{x} = (4; 1; 2; 6)$,

4) $\overrightarrow{a_1} = (3; -1; 2; 0)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; 1; 2; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (2; 1; -1; 1)$, $\overrightarrow{x} = (0; 1; 0; 1)$,

5) $\overrightarrow{a_1} = (4; 1; 2; 5)$, $\overrightarrow{a_2} = (-2; 1; 3; 0)$, $\overrightarrow{a_3} = (6; 1; 2; 1)$, $\overrightarrow{x} = (0; 1; 1; 1)$,

6) $\overrightarrow{a_1} = (2; 1; 2; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; -1; 4; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (5; 0; 1; -3)$, $\overrightarrow{x} = (3; 2; 5; 1)$,

7) $\overrightarrow{a_1} = (5; 2; 0; -1)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; 2; 1; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 1; 1; 1)$, $\overrightarrow{x} = (1; 2; 0; 3)$,

8) $\overrightarrow{a_1} = (2; 3; 2; 3)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; 2; 3; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 2; 3; 4)$, $\overrightarrow{x} = (6; 5; 4; 3)$,

9) $\overrightarrow{a_1} = (1; -1; 2; 4)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; -3; 4; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (5; 7; 2; 1)$, $\overrightarrow{x} = (3; 0; 0; 1)$,

10) $\overrightarrow{a_1} = (4; 2; -1; 3)$, $\overrightarrow{a_2} = (0; -1; 0; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (5; 0; 1; 2)$, $\overrightarrow{x} = (2; 3; 1; 5)$,

11) $\overrightarrow{a_1} = (2; 2; 1; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (-1; 1; 0; 4)$, $\overrightarrow{a_3} = (3; 1; 2; 4)$, $\overrightarrow{x} = (0; 1; 2; 3)$,

12) $\overrightarrow{a_1} = (4; 1; 2; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (0; -1; 1; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (-1; 0; 3; 5)$, $\overrightarrow{x} = (1; 1; 1; 1)$,

13) $\overrightarrow{a_1} = (2; 3; 0; 2)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 5; 1; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (3; 6; 1; -4)$, $\overrightarrow{x} = (6; -2; 0; 1)$,

14) $\overrightarrow{a_1} = (3; -1; 1; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 1; 4; 5)$, $\overrightarrow{a_3} = (0; 0; 1; 2)$, $\overrightarrow{x} = (5; 3; 5; -1)$,

15) $\overrightarrow{a_1} = (5; 2; 2; 2)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; 1; 2; 0)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 0; 1; 0)$, $\overrightarrow{x} = (6; 4; 1; 1)$,

16) $\overrightarrow{a_1} = (1; 3; 0; 5)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; -2; 1; 4)$, $\overrightarrow{a_3} = (2; 1; 2; 1)$, $\overrightarrow{x} = (4; 4; 0; 1)$,

17) $\overrightarrow{a_1} = (4; 0; 0; -3)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 1; 5; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (-1; 1; 3; 1)$, $\overrightarrow{x} = (5; 0; 5; 0)$,

18) $\overrightarrow{a_1} = (1; 2; 1; 2)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; -3; 4; 0)$, $\overrightarrow{a_3} = (3; 0; 1; 4)$, $\overrightarrow{x} = (1; 0; 0; 1)$,

19) $\overrightarrow{a_1} = (2; 3; 4; -1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; 1; 0; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (2; 1; 2; 0)$, $\overrightarrow{x} = (1; 2; 2; 1)$,

20) $\overrightarrow{a_1} = (5; 1; 2; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; -1; 2; 5)$, $\overrightarrow{a_3} = (6; 0; 1; 5)$, $\overrightarrow{x} = (1; 2; 5; 1)$,

21) $\overrightarrow{a_1} = (3; 2; 0; 2)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; 2; 5; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (3; 2; 3; 1)$, $\overrightarrow{x} = (4; 0; 1; -1)$,

22) $\overrightarrow{a_1} = (1;2;3;1)$, $\overrightarrow{a_2} = (2;0;1;2)$, $\overrightarrow{a_3} = (-2;0;1;4)$, $\overrightarrow{x} = (7;1;3;1)$,

23) $\overrightarrow{a_1} = (6;2;-1;3)$, $\overrightarrow{a_2} = (1;-1;1;3)$, $\overrightarrow{a_3} = (0;0;2;4)$, $\overrightarrow{x} = (1;0;0;1)$,

24) $\overrightarrow{a_1} = (2;1;0;1)$, $\overrightarrow{a_2} = (0;2;2;1)$, $\overrightarrow{a_3} = (-3;1;5;2)$, $\overrightarrow{x} = (0;1;1;1)$,

25) $\overrightarrow{a_1} = (0;1;0;2)$, $\overrightarrow{a_2} = (2;1;0;1)$, $\overrightarrow{a_3} = (1;1;0;1)$, $\overrightarrow{x} = (1;2;1;1)$,

26) $\overrightarrow{a_1} = (-1;1;1;1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1;-1;0;3)$, $\overrightarrow{a_3} = (0;0;1;0)$, $\overrightarrow{x} = (1;0;2;1)$,

27) $\overrightarrow{a_1} = (1;1;1;-1)$, $\overrightarrow{a_2} = (0;-1;1;0)$, $\overrightarrow{a_3} = (2;1;2;0)$, $\overrightarrow{x} = (1;2;3;1)$,

28) $\overrightarrow{a_1} = (0;3;0;1)$, $\overrightarrow{a_2} = (2;1;0;0)$, $\overrightarrow{a_3} = (-1;1;1;1)$, $\overrightarrow{x} = (2;1;2;-1)$,

29) $\overrightarrow{a_1} = (2;1;0;-1)$, $\overrightarrow{a_2} = (0;-1;0;3)$, $\overrightarrow{a_3} = (1;0;3;4)$, $\overrightarrow{x} = (1;1;3;1)$,

30) $\overrightarrow{a_1} = (4;-1;1;1)$, $\overrightarrow{a_2} = (3;0;2;1)$, $\overrightarrow{a_3} = (-3;2;1;5)$, $\overrightarrow{x} = (0;0;0;1)$.

10.6. **Застосування матриці Грама.** У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти:

1) Відстань між прямими
$l_1: \quad \dfrac{x+3}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{1}$ та $l_2: \quad \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z+3}{2}$.

2) Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (1;2;3)$, $\overrightarrow{e_2} = (1;0;1)$, $\overrightarrow{e_3} = (1;-1;1)$.

3) Площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (0;2;3)$, $\overrightarrow{e_2} = (1;3;-1)$.

4) Відстань між прямими $l_1: \begin{cases} x = 2+t, \\ y = 3-t, \\ z = 2t \end{cases}$ та $l_2: \begin{cases} x = 1-2t, \\ y = 3, \\ z = 2+3t \end{cases}$ $t \in R$.

5) Розклад вектора $\overrightarrow{a} = (3;1;3)$ за векторами $\overrightarrow{e_1} = (1;2;-3)$, $\overrightarrow{e_2} = (2;-1;1)$, $\overrightarrow{e_3} = (0;1;2)$.

6) Об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (-1;0;2)$, $\overrightarrow{e_2} = (2;1;3)$, $\overrightarrow{e_3} = (4;-1;2)$.

7) Відстань між прямими
$l_1: \quad \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z+3}{3}$ та $l_2: \quad \dfrac{x+4}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{0}$.

8) Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (4;0;2)$, $\overrightarrow{e_2} = (-1;2;5)$, $\overrightarrow{e_3} = (2;1;0)$.

9) Площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (-1;3;4)$, $\overrightarrow{e_2} = (0;2;-1)$.

10) Відстань між прямими $l_1: \begin{cases} x = 1+3t, \\ y = 2+t, \\ z = 3-t \end{cases}$ та $l_2: \begin{cases} x = 2t, \\ y = 3+t, \\ z = 2-3t \end{cases}$ $t \in R$.

11) Розклад вектора $\overrightarrow{a} = (8;13;8)$ за векторами $\overrightarrow{e_1} = (1;-2;1)$, $\overrightarrow{e_2} = (2;3;4)$, $\overrightarrow{e_3} = (4;0;-2)$.

12) Об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (0;3;-2)$, $\overrightarrow{e_2} = (-2;1;1)$, $\overrightarrow{e_3} = (1;2;2)$.

13) Відстань між прямими
$l_1: \quad \dfrac{x}{4} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+3}{1}$ та $l_2: \quad \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-3}{0} = \dfrac{z-1}{2}$.

14) Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (4;-1;2)$, $\overrightarrow{e_2} = (2;1;-1)$, $\overrightarrow{e_3} = (3;1;4)$.

15) Площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (2;3;-1)$, $\overrightarrow{e_2} = (1;4;2)$.

16) Відстань між прямими $l_1: \begin{cases} x = 3t, \\ y = 1-2t, \\ z = 3+t \end{cases}$ та $l_2: \begin{cases} x = 2-t, \\ y = 2+3t, \\ z = 1-2t \end{cases}$ $t \in R$.

17) Розклад вектора $\overrightarrow{a} = (10;-3;1)$ за векторами $\overrightarrow{e_1} = (2;-3;1)$, $\overrightarrow{e_2} = (2;4;-2)$, $\overrightarrow{e_3} = (3;5;-2)$.

18) Об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (2;1;0)$, $\overrightarrow{e_2} = (-2;3;4)$, $\overrightarrow{e_3} = (2;1;-3)$.

19) Відстань між прямими
$l_1: \quad \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z+2}{1}$ та $l_2: \quad \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-3}{-1}$.

20) Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (5; 0; -3)$, $\overrightarrow{e_2} = (2; 4; 1)$, $\overrightarrow{e_3} = (0; 1; -1)$.

21) Площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (3; -2; 1)$, $\overrightarrow{e_2} = (1; 3; 2)$.

22) Відстань між прямими $l_1: \begin{cases} x = 1 - 4t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = -2 + t \end{cases}$ та $l_2: \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 2t, \\ z = -2 + 3t \end{cases}$ $t \in R$.

23) Розклад вектора $\overrightarrow{a} = (-1; 1; -4)$ за векторами $\overrightarrow{e_1} = (3; 2; -3)$, $\overrightarrow{e_2} = (1; -3; 2)$, $\overrightarrow{e_3} = (-1; -3; 2)$.

24) Об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (1; 2; 4)$, $\overrightarrow{e_2} = (-2; 1; 4)$, $\overrightarrow{e_3} = (4; 0; -2)$.

25) Відстань між прямими
$l_1: \quad \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-4}{1}$ та $l_2: \quad \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{-2}$.

26) Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (3; 2; -3)$, $\overrightarrow{e_2} = (2; 1; 1)$, $\overrightarrow{e_3} = (4; -1; 3)$.

27) Площу паралелограма побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (-2; 1; 3)$, $\overrightarrow{e_2} = (1; 3; -2)$.

28) Відстань між прямими $l_1: \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ та $l_2: \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 3 - 2t, \\ z = 2 + 3t \end{cases}$ $t \in R$.

29) Розклад вектора $\overrightarrow{a} = (6; 7; 7)$ за векторами $\overrightarrow{e_1} = (2; 1; 5)$, $\overrightarrow{e_2} = (3; 2; 1)$, $\overrightarrow{e_3} = (4; 1; 1)$.

30) Об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (2; 1; 5)$, $\overrightarrow{e_2} = (-2; 1; -3)$, $\overrightarrow{e_3} = (1; 1; -4)$.

11. Лінійні оператори в унітарному та евклідовому просторах

11.1. Знаходження матриці спряженого оператора в ортонормованому та довільному базисах. а) У деякому ортонормованому базисі задано матрицю оператора A. Знайти матрицю спряженого оператора A^* в цьому ж базисі:

1) $A = \begin{pmatrix} 3+2i & -1+i & 2 \\ -i & 0 & 4-5i \\ 1 & -1 & i \end{pmatrix}$; 8) $A = \begin{pmatrix} 1-i & 2+i & 7i \\ -4 & 6 & 3+6i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 4-i & -2+3i & 2i \\ -1 & 2 & i \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; 9) $A = \begin{pmatrix} 8-7i & 2+4i & i \\ -1+3i & 2i & -i \\ 0 & -3i & 1 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 2+i & -3 & i \\ -1-i & 2i & 5 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix}$; 10) $A = \begin{pmatrix} 3-2i & 2+3i & 2+i \\ -7 & 2 & i \\ 3 & -6 & 7 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} i & 2i & 2+i \\ 6 & 0 & 1-3i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix}$; 11) $A = \begin{pmatrix} -i & -4 & -2i \\ -1+4i & 2-i & 4i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2-i \\ -1-5i & 7 & 1+i \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 12) $A = \begin{pmatrix} 2-2i & 6+3i & 2-i \\ -8 & 2+5i & 1+i \\ i & 3 & -i \end{pmatrix}$;

6) $A = \begin{pmatrix} 3-6i & -1+3i & 7 \\ -1+i & 2-5i & -i \\ i & -4-2i & 0 \end{pmatrix}$; 13) $A = \begin{pmatrix} 3+i & 1+2i & i \\ 5+7i & 2 & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$;

7) $A = \begin{pmatrix} 4+i & 2-3i & -2i \\ -1+i & 6 & 3+i \\ 5 & 3+2i & -1 \end{pmatrix}$; 14) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2i & 3+2i \\ -1 & 2-6i & 7+i \\ -i & -6 & 4 \end{pmatrix}$;

$$15)\ A=\begin{pmatrix} 5-2i & 2-3i & 4+i \\ -1+5i & -2 & -6i \\ 1 & -2 & 4i \end{pmatrix};\quad 23)\ A=\begin{pmatrix} i & i & i \\ 1 & 2 & 3 \\ 4i & 5+i & 6-i \end{pmatrix};$$

$$16)\ A=\begin{pmatrix} 1-5i & -2+i & 7-2i \\ -5 & 0 & 4i \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix};\quad 24)\ A=\begin{pmatrix} 1-i & 2+4i & -2i \\ -i & 2-i & -i \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$17)\ A=\begin{pmatrix} 5-i & 4+i & 3i \\ -5 & 2i & -i \\ 1 & -6 & 1+6i \end{pmatrix};\quad 25)\ A=\begin{pmatrix} 5-2i & 2+i & 2-3i \\ -1-i & 2 & i \\ 7 & -i & i \end{pmatrix};$$

$$18)\ A=\begin{pmatrix} 1-2i & -1+i & 2+i \\ -1 & 4 & i \\ -i & 2 & 0 \end{pmatrix};\quad 26)\ A=\begin{pmatrix} 0 & 2i & 2-7i \\ -1-i & 8 & 4i \\ 1 & -1 & 1+i \end{pmatrix};$$

$$19)\ A=\begin{pmatrix} -3-2i & -2 & i \\ 7 & 2i & -i \\ 4 & -3+i & 1 \end{pmatrix};\quad 27)\ A=\begin{pmatrix} i & -i & 4i \\ 2 & 7-6i & -i \\ 0 & -3i & 0 \end{pmatrix};$$

$$20)\ A=\begin{pmatrix} -i & 2+3i & 2-i \\ 0 & 2 & i \\ i & 3 & 0 \end{pmatrix};\quad 28)\ A=\begin{pmatrix} 6-i & 2+6i & i \\ -8 & 2-i & 7i \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$21)\ A=\begin{pmatrix} 1-i & 2-i & i \\ 4 & 2i & -i \\ 0 & -3i & 0 \end{pmatrix};\quad 29)\ A=\begin{pmatrix} 5i & 1-i & 2+8i \\ -1+i & 0 & 1 \\ 9 & 3-2i & 0 \end{pmatrix};$$

$$22)\ A=\begin{pmatrix} -1-3i & i & 2-3i \\ 4 & 0 & 5i \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};\quad 30)\ A=\begin{pmatrix} i & i & i \\ -1-2i & 2+3i & 5+i \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

б) Лінійний оператор має у базисі f_1, f_2 матрицю А. Знайти матрицю спряженого оператора A^* у цьому ж базисі, якщо координати векторів f_1 та f_2 задано в деякому ортонормованому базисі.

1) $f_1 = (1; 0),\ f_2 = (1; 1),\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

2) $f_1 = (2; 1),\ f_2 = (1; 3),\ A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $f_1 = (-1; 1),\ f_2 = (2; 0),\ A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$;

4) $f_1 = (1; 1),\ f_2 = (1; -2),\ A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

5) $f_1 = (0; 1),\ f_2 = (1; 2),\ A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$;

6) $f_1 = (3; 1),\ f_2 = (1; -2),\ A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$;

7) $f_1 = (-1; 1),\ f_2 = (0; 2),\ A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

8) $f_1 = (-1; 2),\ f_2 = (1; 3),\ A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;

9) $f_1 = (2; 3),\ f_2 = (-1; 2),\ A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$;

10) $f_1 = (1; 1),\ f_2 = (2; 3),\ A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;

11) $f_1 = (-3; -1),\ f_2 = (2; -2),\ A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$;

12) $f_1 = (-4; 1),\ f_2 = (2; 3),\ A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$;

13) $f_1 = (1;1),\ f_2 = (1;-3),\ A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$

14) $f_1 = (-1;1),\ f_2 = (-2;0),\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$

15) $f_1 = (0;-1),\ f_2 = (1;-2),\ A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix};$

16) $f_1 = (5;2),\ f_2 = (1;-3),\ A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix};$

17) $f_1 = (3;4),\ f_2 = (2;-1),\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$

18) $f_1 = (4;5),\ f_2 = (-2;1),\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$

19) $f_1 = (3;2),\ f_2 = (1;-2),\ A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 1 \end{pmatrix};$

20) $f_1 = (1;-1),\ f_2 = (2;-1),\ A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix};$

21) $f_1 = (2;4),\ f_2 = (3;-1),\ A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix};$

22) $f_1 = (2;5),\ f_2 = (4;-1),\ A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix};$

23) $f_1 = (-2;1),\ f_2 = (1;3),\ A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix};$

24) $f_1 = (6;4),\ f_2 = (-2;4),\ A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix};$

25) $f_1 = (5;2),\ f_2 = (-2;4),\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$

26) $f_1 = (3; 5),\ f_2 = (4; -2),\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

27) $f_1 = (0; 1),\ f_2 = (1; -3),\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$;

28) $f_1 = (1; 1),\ f_2 = (-1; 2),\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

29) $f_1 = (2; 3),\ f_2 = (1; -2),\ A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$;

30) $f_1 = (4; 4),\ f_2 = (1; 0),\ A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

11.2. **Власні числа та власні вектори самоспряженого оператора.** Для самоспряженого оператора знайти власні числа, власні вектори та вказати ортогональне перетворення, що приводить даний оператор до діагональної форми.

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ -4 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 5 \\ -5 & -3 & -5 \\ 5 & -5 & -3 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 5 & 1 & 5 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;

6) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

7) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

8) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$;

$$9)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$10)\ A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -5 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix};$$

$$11)\ A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix};$$

$$12)\ A=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 5 \\ 5 & 7 & -5 \\ 5 & -5 & 7 \end{pmatrix};$$

$$13)\ A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$14)\ A=\begin{pmatrix} -3 & 5 & 5 \\ 5 & -3 & -5 \\ 5 & -5 & -3 \end{pmatrix};$$

$$15)\ A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix};$$

$$16)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$17)\ A=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -3 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix};$$

$$18)\ A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -4 & 3 & -4 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$19)\ A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$20)\ A=\begin{pmatrix} 8 & 5 & -5 \\ 5 & 8 & 5 \\ -5 & 5 & 8 \end{pmatrix};$$

$$21)\ A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 3 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix};$$

$$22)\ A=\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$23)\ A=\begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ -4 & -1 & 4 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix};$$

$$24)\ A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -5 \\ 5 & 2 & 5 \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix};$$

$$25)\ A=\begin{pmatrix} -7 & 5 & 5 \\ 5 & -7 & -5 \\ 5 & -5 & -7 \end{pmatrix};$$

$$26)\ A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

27) $A = \begin{pmatrix} -7 & 5 & -5 \\ 5 & -7 & 5 \\ -5 & 5 & -7 \end{pmatrix}$;

29) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

28) $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

30) $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

11.3. **Оператор ортогонального проектування.** Нехай R^3– арифметичний лінійний простір, $\overrightarrow{i} = (1;0;0)$, $\overrightarrow{j} = (0;1;0)$, $\overrightarrow{k} = (0;0;1)$– його базис. Знайти в цьому базисі матрицю оператора ортогонального проектування
a) на пряму L, яка проходить через початок координат;
b) на площину π, яка проходить через початок координат.

1) (a) $l: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{-3}$; (b) $\pi: \ 3x + 2y - z = 0.$

2) (a) $l: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{0}$; (b) $\pi: \ x + 3y - 2z = 0.$

3) (a) $l: \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{3}$; (b) $\pi: \ 2x - 4y + 3z = 0.$

4) (a) $l: \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{1}$; (b) $\pi: \ -x + 3y + 5z = 0.$

5) (a) $l: \dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{5}$; (b) $\pi: \ x + 2y - 4z = 0.$

6) (a) $l: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{-1}$; (b) $\pi: \ 2x + 3y + 2z = 0.$

7) (a) $l: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{2}$; (b) $\pi: \ x + 5y + 2z = 0.$

8) (a) $l: \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{1}$; (b) $\pi: \ -x + 3y + 4z = 0.$

9) (a) $l: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z}{2}$; (b) $\pi: \ 5x + y - 2z = 0.$

10) (a) $l: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{-1}$; (b) $\pi: \ 2x + 3y - 3z = 0.$

11)

(a) $l: \dfrac{x}{-3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{0}$; (b) $\pi: \ 2x + 3y - 5z = 0.$

12) (a) $l: \dfrac{x}{-4} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{3}$; (b) $\pi: \ x + 2y - 3z = 0.$

13) (a) $l: \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{1}$; (b) $\pi: \ -x + 2y + 3z = 0.$

14) (a) $l: \dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{-2}$; (b) $\pi: \ x + 3y - 4z = 0.$

15) (a) $l: \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$; (b) $\pi: \ -3x + y + 2z = 0.$

16) (a) $l: \dfrac{x}{-3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{4}$; (b) $\pi: \ 2x + 3y - 4z = 0.$

17) (a) $l: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{1}$; (b) $\pi: \ 5x + y + 2z = 0.$

18) (a) $l: \dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{1}$; (b) $\pi: \ x - 3y - 2z = 0.$

19) (a) $l: \dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-1}$; (b) $\pi: \ x - 2y + 5z = 0.$

20) (a) $l: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{5}$; (b) $\pi: \ 2x - y - 3z = 0.$

21) (a) $l: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{1}$; (b) $\pi: \ -x + 2y + 3z = 0.$

22) (a) $l: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{-1}$; (b) $\pi: \ -x + 2y + 4z = 0.$

23) (a) $l: \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{3}$; (b) $\pi: \ x + y - 4z = 0.$

24) (a) $l: \dfrac{x}{-3} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{2}$; (b) $\pi: \ 3x - 2y - 4z = 0.$

25) (a) $l: \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{5}$; (b) $\pi: \ -2x + y + 4z = 0.$

26) (a) $l: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{0}$; (b) $\pi: \ 4x + y - z = 0.$

27) (a) $l: \dfrac{x}{-4} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$; (b) $\pi: \ x - 5y - 2z = 0.$

28)

(a) $l: \dfrac{x}{7} = \dfrac{y}{6} = \dfrac{z}{-1}$; (b) $\pi: \ 2x + 3y - 2z = 0$.

29) (a) $l: \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{-3}$; (b) $\pi: \ x + 4y + 3z = 0$.

30) (a) $l: \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{1}$; (b) $\pi: \ x + y - 5z = 0$.

11.4. **Спектральний розклад самоспряжених операторів.** Знайти спектральний розклад самоспряженого оператора $A: \ E^2 \to E^2$, якщо оператор в деякому ортонормованому базисі $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ має матрицю A:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$; 11) $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$; 21) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; 12) $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & -18 \end{pmatrix}$; 22) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -13 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$; 13) $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$; 23) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$; 14) $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$; 24) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$; 15) $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$; 25) $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

6) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$; 16) $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$; 26) $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$;

7) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; 17) $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$; 27) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$;

8) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$; 18) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$; 28) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$;

9) $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$; 19) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; 29) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$;

10) $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$; 20) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$; 30) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$.

11.5. **Представлення невиродженого оператора у вигляді добутку унітарного та невиродженого додатно визначеного операторів.** Подати невироджений оператор $A: \ E^2 \to E^2$, матрицю якого задано в деякому ортонормованому базисі $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$, у вигляді добутку унітарного та додатно визначеного оператора:

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; 11) $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; 21) $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$; 12) $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$; 22) $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; 13) $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; 23) $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$; 14) $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$; 24) $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; 15) $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$; 25) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$;

6) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; 16) $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$; 26) $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

7) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$; 17) $A = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$; 27) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$;

8) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; 18) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; 28) $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$;

9) $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; 19) $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; 29) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$;

10) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; 20) $A = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; 30) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

11.6. **Різні задачі.**

1) Доведіть, що коли оператор A – лінійний, то й спряжений оператор A^* – лінійний.

2) Нехай A – самоспряжений оператор, що діє в унітарному просторі L. Доведіть, що для довільного $x \in L$ число (Ax, x) буде дійсним.

3) Нехай A – самоспряжений оператор. Доведіть, що власні числа оператора A дійсні.

4) Нехай A – самоспряжений оператор. Доведіть, що власні вектори оператора A, які відповідають різним власним числам, ортогональні.

5) Доведіть, що $(A^k)^* = (A^*)^k$ для довільного $k \in N$.

6) Доведіть, що $KerA = (ImA^*)^\perp$.

7) Нехай оператор A самоспряжений та $KerA = 0$. Доведіть, що оператор A^2 – додатно визначений.

8) Нехай A та B - самоспряжені оператори. Доведіть, що за умови $AB = BA$ має місце рівність $(Ax, By) = (Bx, Ay)$.

9) Доведіть, що $(KerA^*)^\perp = ImA$.

10) Відомо, що $KerA^* = 0$. Доведіть, що оператор A має обернений оператор A^{-1}.

11) Відомо, що оператор A має обернений оператор A^{-1}. Доведіть, що $KerA^* = 0$.

12) Доведіть, що добуток AB ортогональних операторів A та B є ортогональним оператором.

13) Доведіть, що ядро оператора A збігається з ядром оператора A^*A.

14) Нехай $B^*A = 0$. Доведіть, що $ImB = (ImA)^\perp$.

15) Доведіть, що ядро оператора A збігається з ядром оператора A^*A.

16) Знайти зв'язок між власними числами оператора A, що діє в унітарному просторі, та власними числами спряженого оператора A^*.

17) Нехай x - власний вектор оператора A, що відповідає власному числу λ, а y - власний вектор оператора A^*, що відповідає власному числу μ, причому $\lambda \neq \overline{\mu}$. Доведіть, що вектори x та y ортогональні.

18) Доведіть, що довільний лінійний оператор, що діє в одновимірному лінійному просторі, є нормальним оператором.

19) Доведіть, що $KerA = (ImA^*)^{\perp}$.

20) Доведіть, що додатно визначений оператор має додатні власні числа.

21) Нехай e_1 - власний вектор самоспряженого оператора A, що діє в просторі L. Позначимо через L_1 сукупність векторів з L, ортогональних до e_1. Доведіть, що L_1 є інваріантним підпростором оператора A.

22) Нехай e_1 - власний вектор унітарного оператора A, що діє в просторі L. Позначимо через L_1 сукупність векторів з L, ортогональних до e_1. Доведіть, що L_1 є інваріантним підпростором оператора A.

23) Доведіть, що коли оператор A – нормальний, то оператори A та A^* мають спільний власний вектор e, причому $Ae = \lambda e$, $A^*e = \overline{\lambda}e$.

24) Нехай e_1 - власний вектор нормального оператора A, що діє в просторі L. Позначимо через L_1 сукупність векторів з L, ортогональних до e_1. Доведіть, що L_1 є інваріантним підпростором оператора A.

25) Доведіть, що модуль власного числа унітарного оператора A дорівнює 1.

26) Доведіть, що коли власні числа самоспряженого оператора A невід'ємні, то $(Ax, x) \geq 0$ для довільних x.

27) Нехай $e_1, ..., e_n$ — ортонормований базис лінійного простору L, $P_k x = (x, e_k)e_k$ – оператор проектування на одновимірний підпростір, породжений вектором e_k. Доведіть, що $P_k^m = P_k$ для довільного $m \in N$.

28) Нехай $e_1, ..., e_n$ — ортонормований базис лінійного простору L, $P_k x = (x, e_k)e_k$ – оператор проектування на одновимірний підпростір, породжений вектором e_k. Доведіть, що $P_k P_j = 0$ при $k \neq j$.

29) Доведіть, що коли оператор A – нормальний, то $\|Ax\| = \|A^*x\|$ для довільного вектора x.

30) Доведіть, що коли оператор A, що діє в n–вимірному евклідовому просторі, має n попарно ортогональних власних векторів, то він є нормальним.

12. Білінійні та квадратичні форми

12.1. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду методом Лагранжа. Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду.

1) $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_2x_4 - 2x_3x_4$;

2) $x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 + 10x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_1x_4 - 6x_2x_3 + 4x_2x_4 - 14x_3x_4$;

3) $x_1^2 + 2x_2^2 + 9x_3^2 + 7x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4 - 6x_3x_4$;

4) $4x_1^2 + 6x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 8x_2x_4$;

5) $4x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 + 7x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_1x_4 - 4x_2x_3 + 8x_2x_4 - 8x_3x_4$;

6) $2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 6x_2x_3 + 2x_2x_4$;

7) $x_1^2 + 8x_2^2 + 14x_3^2 + 24x_4^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_1x_4 - 20x_2x_3 + 12x_2x_4 - 12x_3x_4$;

8) $3x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 + 9x_4^2 + 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_1x_4 + 2x_2x_3 + 10x_2x_4$;

9) $x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 10x_3x_4$;

10) $3x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 3x_4^2 + 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_1x_4 + 2x_2x_3 + 10x_2x_4 + 4x_3x_4$;

11) $x_1^2 + 6x_2^2 + 12x_3^2 + 8x_4^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_1x_4 - 16x_2x_3$;

12) $4x_1^2 + 5x_2^2 + 38x_3^2 + 6x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_1x_4 - 22x_2x_3 + 4x_2x_4 - 30x_3x_4$;

13) $-x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 13x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_4 - 6x_3x_4$;

14) $x_1^2 + 8x_2^2 + 4x_3^2 + 20x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - 12x_2x_3 + 12x_2x_4 - 12x_3x_4$;

15) $4x_1^2 + 3x_2^2 + 12x_3^2 + 35x_4^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_1x_4 - 6x_2x_3 + 6x_2x_4 - 42x_3x_4$;

16) $4x_1^2+8x_2^2+14x_3^2+27x_4^2-8x_1x_2+12x_1x_3-4x_1x_4-20x_2x_3-12x_2x_4+$
$+12x_3x_4$;

17) $9x_1^2+35x_2^2+9x_3^2+84x_4^2+36x_1x_2+18x_1x_3+54x_1x_4+38x_2x_3+104x_2x_4+$
$+54x_3x_4$;

18) $x_1^2-16x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3+6x_1x_4+12x_2x_3-20x_2x_4+24x_3x_4$;

19) $4x_1^2+5x_2^2+24x_3^2+20x_4^2+8x_1x_2+16x_1x_3+24x_1x_4+10x_2x_3+26x_2x_4+$
$+44x_3x_4$;

20) $x_1^2+2x_2^2+9x_3^2+18x_4^2-2x_1x_2-2x_1x_3+4x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4-24x_3x_4$;

21) $x_1^2+8x_2^2+18x_3^2+56x_4^2+4x_1x_2+2x_1x_3-6x_1x_4-12x_2x_3+12x_2x_4-58x_3x_4$;

22) $4x_1^2+5x_2^2+17x_3^2+6x_4^2+4x_1x_2+12x_1x_3+4x_1x_4-2x_2x_3+10x_2x_4-10x_3x_4$;

23) $x_1^2+13x_2^2+12x_3^2+6x_4^2-4x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4-26x_2x_3+14x_2x_4-12x_3x_4$;

24) $4x_1^2+18x_2^2+41x_3^2+5x_4^2+12x_1x_2-4x_1x_3-4x_1x_4-42x_2x_3+12x_2x_4-$
$-42x_3x_4$;

25) $4x_1^2+3x_2^2-6x_3^2-10x_4^2+8x_1x_2+8x_1x_3+8x_1x_4+10x_2x_3+6x_2x_4+28x_3x_4$;

26) $x_1^2+x_3^2-22x_4^2-4x_1x_2-6x_1x_3+4x_1x_4+20x_2x_3-24x_2x_4+12x_3x_4$;

27) $3x_1^2+5x_2^2+6x_3^2+9x_4^2+6x_1x_2+6x_1x_3+6x_1x_4+2x_2x_3+10x_2x_4$;

28) $9x_1^2+5x_2^2+4x_3^2+18x_1x_2+18x_1x_3+18x_1x_4+26x_2x_3+10x_2x_4+28x_3x_4$;

29) $-4x_1^2+5x_2^2+4x_3^2-8x_1x_2-8x_1x_3-8x_1x_4-26x_2x_3+10x_2x_4-24x_3x_4$.

30) $-4x_1^2+11x_2^2+11x_3^2+15x_4^2-4x_1x_2-4x_1x_3-4x_1x_4-14x_2x_3+10x_2x_4-26x_3x_4$;

12.2. **Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду методом Якобі.** Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду.

1) $-4x_1^2+5x_2^2+4x_3^2-8x_1x_2-8x_1x_3-26x_2x_3$;

2) $-9x_1^2-x_3^2-18x_1x_2-18x_1x_3-36x_2x_3$;

3) $4x_1^2+13x_2^2+12x_3^2+8x_1x_2+8x_1x_3-10x_2x_3$;

4) $9x_1^2+18x_2^2+17x_3^2+18x_1x_2+18x_1x_3$;

5) $x_1^2 + 10x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 16x_2x_3$;

6) $-4x_1^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3$;

7) $-4x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 + 26x_2x_3$;

8) $x_1^2 + 13x_2^2 + 17x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$;

9) $x_1^2 + 18x_2^2 + 39x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 24x_2x_3$;

10) $-4x_1^2 + 24x_3^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 32x_2x_3$;

11) $4x_1^2 + 7x_2^2 - x_3^2 + 16x_1x_2 + 24x_1x_3 + 84x_2x_3$;

12) $4x_1^2 + 17x_2^2 + 43x_3^2 + 16x_1x_2 - 24x_1x_3 - 54x_2x_3$;

13) $4x_1^2 + 101x_2^2 + 8x_3^2 + 40x_1x_2 + 8x_1x_3 + 34x_2x_3$;

14) $-x_1^2 + 3x_2^2 + 25x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 28x_2x_3$;

15) $4x_1^2 - 5x_2^2 - 78x_3^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 46x_2x_3$;

16) $-x_1^2 + 8x_2^2 + 29x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 38x_2x_3$;

17) $-9x_1^2 - 5x_2^2 + 17x_3^2 + 18x_1x_2 - 54x_1x_3 + 14x_2x_3$;

18) $-4x_1^2 + 3x_2^2 + 38x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 22x_2x_3$;

19) $3x_1^2 + 28x_2^2 + 20x_3^2 - 18x_1x_2 + 12x_1x_3 - 42x_2x_3$;

20) $2x_1^2 + 19x_2^2 + 12x_1x_2 - 8x_1x_3 - 22x_2x_3$;

21) $4x_1^2 + 91x_2^2 - 62x_3^2 + 40x_1x_2 + 16x_1x_3 + 134x_2x_3$;

22) $4x_1^2 + 27x_2^2 - x_3^2 + 24x_1x_2 + 24x_1x_3 + 108x_2x_3$;

23) $-4x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 26x_2x_3$;

24) $x_1^2 + 5x_2^2 + 42x_3^2 + 2x_1x_2 + 10x_1x_3 + 26x_2x_3$;

25) $x_1^2 + 2x_2^2 + 25x_3^2 + 2x_1x_2 + 10x_1x_3 + 8x_2x_3$;

26) $4x_1^2 + 5x_2^2 + 79x_3^2 + 8x_1x_2 + 40x_1x_3 + 36x_2x_3$;

27) $4x_1^2 + 35x_2^2 - 13x_3^2 + 24x_1x_2 + 16x_1x_3 + 54x_2x_3$;

28) $x_1^2 + 26x_2^2 + 4x_3^2 + 10x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

29) $x_1^2 + 29x_2^2 + 4x_3^2 + 10x_1x_2 - 2x_1x_3 - 18x_2x_3$;

30) $x_1^2 + 20x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$;

12.3. **Додатно визначені квадратичні форми, критерій Сільвестра.** За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати, чи буде дана квадратична форма знакосталою.

1) $-x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

2) $x_1^2 + 5x_2^2 + 42x_3^2 + 2x_1x_2 + 10x_1x_3 + 26x_2x_3$;

3) $x_1^2 + 5x_2^2 + 26x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 20x_2x_3$;

4) $-x_1^2 - 10x_2^2 - 11x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 16x_2x_3$;

5) $-x_1^2 - 2x_2^2 - 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$;

6) $x_1^2 + 10x_2^2 + 12x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3$;

7) $x_1^2 + 10x_2^2 + 9x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 10x_2x_3$;

8) $-x_1^2 - 8x_2^2 - 14x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 20x_2x_3$;

9) $-x_1^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;

10) $9x_1^2 + 13x_2^2 + 11x_3^2 - 12x_1x_2 + 6x_1x_3 - 22x_2x_3$;

11) $-x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 10x_2x_3$;

12) $-x_1^2 - 5x_2^2 - 17x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$;

13) $4x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 + 6x_2x_3$;

14) $4x_1^2 + 17x_2^2 + 54x_3^2 - 16x_1x_2 - 24x_1x_3 + 40x_2x_3$;

15) $4x_1^2 + 5x_2^2 + 33x_3^2 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 + 8x_2x_3$;

16) $-x_1^2 - 2x_2^2 - 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$;

17) $x_1^2 - 8x_2^2 - 9x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 20x_2x_3$;

18) $x_1^2 - 3x_2^2 - 8x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 14x_2x_3$;

19) $-4x_1^2 - 20x_2^2 - 38x_3^2 + 16x_1x_2 + 24x_1x_3 - 52x_2x_3$;

20) $4x_1^2 + 37x_2^2 + 20x_3^2 - 24x_1x_2 - 16x_1x_3 + 50x_2x_3$;

21) $4x_1^2 + 73x_2^2 + 182x_3^2 - 32x_1x_2 + 48x_1x_3 - 228x_2x_3$;

22) $x_1^2 + 10x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 10x_2x_3$;

23) $x_1^2 - 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

24) $x_1^2 + 2x_2^2 + 11x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$;

25) $-x_1^2 - 5x_2^2 - 10x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$;

26) $-3x_1^2 - 4x_2^2 - 40x_3^2 + 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$;

27) $x_1^2 + 18x_2^2 + 62x_3^2 - 6x_1x_2 - 10x_1x_3 - 6x_2x_3$;

28) $-x_1^2 - 5x_2^2 - 21x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 20x_2x_3$;

29) $x_1^2 + 2x_2^2 + 19x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;

30) $x_1^2 + 2x_2^2 + 47x_3^2 - x_1x_2 - 12x_1x_3 + 6x_2x_3$.

12.4. **Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду за допомогою ортогонального перетворення.** Звести дану квадратичну форму до канонічного вигляду за допомогою ортогонального перетворення та знайти невироджене лінійне перетворення, яке зводить до цього вигляду.

1) $x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$;

2) $-x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$;

3) $3x_1^2 - 6x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$;

4) $x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 + 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$;

5) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

6) $-2x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

7) $x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

8) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

9) $2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

10) $3x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

11) $3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

12) $4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

13) $4x_1^2+4x_2^2+8x_3^2+4x_1x_3+2x_2x_3$;

14) $5x_1^2+5x_2^2+x_3^2+4x_1x_3+2x_2x_3$;

15) $5x_1^2+5x_2^2+9x_3^2+4x_1x_3+2x_2x_3$;

16) $6x_1^2+6x_2^2+2x_3^2+4x_1x_3+2x_2x_3$;

17) $6x_1^2+6x_2^2+10x_3^2+4x_1x_3+2x_2x_3$;

18) $3x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$;

19) $3x_1^2-3x_2^2+3x_3^2-6x_1x_2-6x_1x_3-6x_2x_3$;

20) $3x_1^2-3x_2^2+3x_3^2+6x_1x_2-6x_1x_3+6x_2x_3$;

21) $-2x_1^2-2x_2^2+2x_3^2+6x_1x_2-6x_1x_3+6x_2x_3$;

22) $2x_1^2+2x_2^2-2x_3^2-6x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$;

23) $2x_1^2+2x_2^2-2x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$;

24) $-2x_1^2-2x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$;

25) $4x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3+2x_2x_3$;

26) $x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2x_1x_3$;

27) $x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3+2x_2x_3$;

28) $2x_1^2+3x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$;

29) $2x_1^2+3x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3-2x_2x_3$;

30) $x_1^2-2x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-4x_1x_3-2x_2x_3$.

12.5. **Білінійні та півторалінійні форми.** Перевірити, що дана дійсна білінійна (комплексна півторалінійна) форма задовольняє умови скалярного добутку в евклідовому (унітарному) просторі.

1) $B(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})=4x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+2x_2y_2-x_2y_3-x_3y_2+3x_3y_3$.

2) $B(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})=x_1\overline{y_1}-ix_1\overline{y_2}+ix_2\overline{y_1}+2x_2\overline{y_2}+(2+i)x_2\overline{y_3}+(2-i)x_3\overline{y_2}+6x_3\overline{y_3}$.

3) $B(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})=x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+5x_2y_2-2x_2y_3-2x_3y_2+7x_3y_3$.

4) $B(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})=4x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+2x_2y_2-x_2y_3-x_3y_2+3x_3y_3$.

5) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$.

6) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$.

7) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

8) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$.

9) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$.

10) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

11) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$.

12) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$.

13) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

14) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$.

15) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$.

16) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

17) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$.

18) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$.

19) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

20) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$.

21) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$.

22) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

23) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$.

24) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$.

25) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

26) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$.

27) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$.

28) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

29) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$.

30) $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$.

12.6. **Перетворення матриці білінійної та півторалінійної форми при переході до іншого базису.** В базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ задано дійсну білінійну (комплексну півторалінійну) форму. Знайдіть, якого вигляду набуде ця форма в базисі з векторів $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо координати веторів $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$ задано в базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$.

1) $\overrightarrow{f_1} = (-1; 0; 3)$, $\overrightarrow{f_2} = (6; 3; -1)$, $\overrightarrow{f_3} = (3; -2; -3)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

2) $\overrightarrow{f_1} = (-i; 1; 0)$, $\overrightarrow{f_2} = (1; 0; 0)$, $\overrightarrow{f_3} = (1+2i; -2+i; 1)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$.

3) $\overrightarrow{f_1} = (-1; -2; -2)$, $\overrightarrow{f_2} = (3; 3; 1)$, $\overrightarrow{f_3} = (2; 0; -3)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 7x_3y_3$.

4) $\overrightarrow{f_1} = (6; 3; 0)$, $\overrightarrow{f_2} = (2; 5; 4)$, $\overrightarrow{f_3} = (1; -3; -1)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

5) $\overrightarrow{f_1} = (1; 0; -1)$, $\overrightarrow{f_2} = (2i; 0; 1)$, $\overrightarrow{f_3} = (-1; 1+i; 0)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$.

6) $\overrightarrow{f_1} = (2; i-3)$, $\overrightarrow{f_2} = (2i; 0)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$.

7) $\overrightarrow{f_1} = (7; -1; 7)$, $\overrightarrow{f_2} = (2; 3; 0)$, $\overrightarrow{f_3} = (3; 2; -1)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

8) $\overrightarrow{f_1} = (1+i; 0; 1)$, $\overrightarrow{f_2} = (2; 0; 1)$, $\overrightarrow{f_3} = (i; -i; 0)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$.

9) $\overrightarrow{f_1} = (2; -3)$, $\overrightarrow{f_2} = (-2i; 1-2i)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$.

10) $\overrightarrow{f_1} = (3; 2; 1)$, $\overrightarrow{f_2} = (-4; 0; 2)$, $\overrightarrow{f_3} = (1; -5; -6)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

11) $\overrightarrow{f_1} = (-1; 1+i; -1)$, $\overrightarrow{f_2} = (2; 0; i)$, $\overrightarrow{f_3} = (0; i; 2)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$.

12) $\overrightarrow{f_1} = (8-i;0)$, $\overrightarrow{f_2} = (2;-3i)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$.

13) $\overrightarrow{f_1} = (4;0;3)$, $\overrightarrow{f_2} = (4;5;-2)$, $\overrightarrow{f_3} = (1;1;4)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

14) $\overrightarrow{f_1} = (-1;1;8)$, $\overrightarrow{f_2} = (4i;0;5)$, $\overrightarrow{f_3} = (0;0;3i)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$.

15) $\overrightarrow{f_1} = (0;1+i)$, $\overrightarrow{f_2} = (2-i;0)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$.

16) $\overrightarrow{f_1} = (5;2;1)$, $\overrightarrow{f_2} = (-1;3;0)$, $\overrightarrow{f_3} = (2;-1;-4)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

17) $\overrightarrow{f_1} = (10;5;1)$, $\overrightarrow{f_2} = (-3;0;2)$, $\overrightarrow{f_3} = (-1;-6;1)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$.

18) $\overrightarrow{f_1} = (2;1-i)$, $\overrightarrow{f_2} = (0;5i)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$.

19) $\overrightarrow{f_1} = (3;1;0)$, $\overrightarrow{f_2} = (-1;-7;3)$, $\overrightarrow{f_3} = (2;3;-1)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

20) $\overrightarrow{f_1} = (2;1;0)$, $\overrightarrow{f_2} = (i;0;2i)$, $\overrightarrow{f_3} = (-1+i;2;0)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$.

21) $\overrightarrow{f_1} = (3;-2i)$, $\overrightarrow{f_2} = (1+i;2-i)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$.

22) $\overrightarrow{f_1} = (-1;1;-3)$, $\overrightarrow{f_2} = (2;3;4)$, $\overrightarrow{f_3} = (-1;6;0)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

23) $\overrightarrow{f_1} = (0;0;1+i)$, $\overrightarrow{f_2} = (1-i;i;0)$, $\overrightarrow{f_3} = (4;0;2)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$.

24) $\overrightarrow{f_1} = (1-i;2i-1)$, $\overrightarrow{f_2} = (0;2)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$.

25) $\overrightarrow{f_1} = (1;0;-1)$, $\overrightarrow{f_2} = (3;1;2)$, $\overrightarrow{f_3} = (2;-3;4)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

26) $\overrightarrow{f_1}=(3;-2;1+i)$, $\overrightarrow{f_2}=(-1;0;2i)$, $\overrightarrow{f_3}=(1;0;1)$,
$(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})=x_1\overline{y_1}-ix_1\overline{y_2}+ix_2\overline{y_1}+2x_2\overline{y_2}+(2+i)x_2\overline{y_3}+(2-i)x_3\overline{y_2}+6x_3\overline{y_3}$.

27) $\overrightarrow{f_1}=(0;1+i)$, $\overrightarrow{f_2}=(1+i;2i)$,
$(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})=2x_1\overline{y_1}+(1+i)x_1\overline{y_2}+(1-i)x_2\overline{y_1}+3x_2\overline{y_2}$.

28) $\overrightarrow{f_1}=(2;7;3)$, $\overrightarrow{f_2}=(3;0;4)$, $\overrightarrow{f_3}=(1;5;3)$,
$(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})=4x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+2x_2y_2-x_2y_3-x_3y_2+3x_3y_3$.

29) $\overrightarrow{f_1}=(1;-2)$, $\overrightarrow{f_2}=(i;2)$,
$(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})=2x_1\overline{y_1}+(1+i)x_1\overline{y_2}+(1-i)x_2\overline{y_1}+3x_2\overline{y_2}$.

30) $\overrightarrow{f_1}=(1;0;5)$, $\overrightarrow{f_2}=(6;2;0)$, $\overrightarrow{f_3}=(3;0;-1)$,
$(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})=x_1\overline{y_1}-ix_1\overline{y_2}+ix_2\overline{y_1}+2x_2\overline{y_2}+(2+i)x_2\overline{y_3}+(2-i)x_3\overline{y_2}+6x_3\overline{y_3}$.

13. Многочлени

13.1. **Кратність кореня многочлена.** За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня c для многочлена $f(x)$.

1) $f(x)=2x^5+18x^4+51x^3+27x^2-81x-81, \quad c=-3;$
2) $f(x)=3x^5+27x^4+79x^3+63x^2-54x-54, \quad c=-3\ ;$
3) $f(x)=2x^5+19x^4+64x^3+90x^2+54x+27, \quad c=-3;$
4) $f(x)=3x^5+28x^4+88x^3+90x^2-27x-54, \quad c=-3;$
5) $f(x)=2x^5-18x^4+53x^3-45x^2-27x+27, \quad c=3;$
6) $f(x)=-2x^5+17x^4-41x^3-9x^2+135x-108, \quad c=3;$
7) $f(x)=3x^5-18x^4+27x^3+x^2-6x+9, \quad c=3;$
8) $f(x)=-3x^5+18x^4-26x^3-5x^2+3x+9, \quad c=3;$
9) $f(x)=3x^5+9x^4+7x^3-3x^2-6x-2, \quad c=-1;$
10) $f(x)=2x^5+6x^4+3x^3-7x^2-9x-3, \quad c=-1;$
11) $f(x)=2x^5+6x^4+7x^3+5x^2+3x+1, \quad c=-1;$
12) $f(x)=3x^5+9x^4+4x^3-12x^2-15x-5, \quad c=-1;$
13) $f(x)=5x^5-15x^4+18x^3-14x^2+9x-3, \quad c=1;$

14) $f(x) = -2x^5 + 6x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 9x - 3, \quad c = 1;$

15) $f(x) = -3x^5 + 9x^4 - 8x^3 + 3x - 1, \quad c = 1;$

16) $f(x) = 5x^5 - 10x^4 + 7x^3 - x^2 - 4x + 3, \quad c = 1;$

17) $f(x) = 2x^5 + 12x^4 + 21x^3 - 2x^2 - 36x - 24, \quad c = -2;$

18) $f(x) = 3x^5 + 18x^4 + 34x^3 + 12x^2 - 24x - 16, \quad c = -2;$

19) $f(x) = 3x^5 + 18x^4 + 38x^3 + 36x^2 + 24x + 16, \quad c = -2;$

20) $f(x) = 2x^5 + 12x^4 + 27x^3 + 34x^2 + 36x + 24, \quad c = -2;$

21) $f(x) = 2x^5 - 12x^4 + 25x^3 - 22x^2 + 12x - 8, \quad c = 2;$

22) $f(x) = 3x^5 - 18x^4 + 38x^3 - 36x^2 + 24x - 16, \quad c = 2;$

23) $f(x) = 2x^5 - 15x^4 + 44x^3 - 64x^2 + 48x - 16, \quad c = 2;$

24) $f(x) = 2x^5 - 16x^4 + 51x^3 - 82x^2 + 68x - 24, \quad c = 2;$

25) $f(x) = 3x^5 - 12x^4 + 10x^3 + 9x^2 - 12x + 4, \quad c = 2;$

26) $f(x) = 3x^5 - 12x^4 + 10x^3 + 9x^2 - 12x + 4, \quad c = 2;$

27) $f(x) = 5x^5 - 20x^4 + 22x^3 - 7x^2 + 4x + 4, \quad c = 2;$

28) $f(x) = 2x^5 - 24x^4 + 97x^3 - 140x^2 + 48x - 64, \quad c = 4;$

29) $f(x) = -3x^5 + 22x^4 - 32x^3 - 31x^2 - 8x + 16, \quad c = 4;$

30) $f(x) = -3x^5 - 25x^4 - 56x^3 - 14x^2 + 16x + 32, \quad c = -4.$

13.2. **Корені многочленів, теорема Безу, схема Горнера.** Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x)$.

1) $f(x) = 6x^4 - x^3 + 22x^2 - 4x - 8;$

2) $f(x) = 18x^4 + 21x^3 + 30x^2 + 28x + 8;$

3) $f(x) = 12x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x - 2;$

4) $f(x) = 12x^4 - 14x^3 + 22x^2 - 21x + 6;$

5) $f(x) = 12x^4 - 5x^3 + 22x^2 - 10x - 4;$

6) $f(x) = 12x^4 + 11x^3 + 38x^2 + 33x + 6;$

7) $f(x) = 12x^4 - 11x^3 + 50x^2 - 44x + 8;$

8) $f(x) = 24x^4 + 46x^3 + 71x^2 + 19x - 10;$

9) $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 20x + 12;$

10) $f(x) = 6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 10x - 12;$

11) $f(x) = 6x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 15x - 18;$

12) $f(x) = 6x^4 + 19x^3 + 37x^2 + 45x + 18;$

13) $f(x) = 8x^4 + 22x^3 + 25x^2 + 17x + 3;$

14) $f(x) = 8x^4 + 18x^3 + 15x^2 + 7x - 3;$

15) $f(x) = 8x^4 + 6x^3 - 7x^2 - 26x - 6;$

16) $f(x) = 8x^4 + 2x^3 + 15x^2 - 64x + 15;$

17) $f(x) = 6x^4 - x^3 + x^2 - 5x + 2;$

18) $f(x) = 6x^4 + 5x^3 + 9x^2 - 4x - 4;$

19) $f(x) = 6x^4 + 13x^3 + 12x^2 - 2x - 4;$

20) $f(x) = 6x^4 + 13x^3 + 27x^2 + 23x + 6;$

21) $f(x) = 6x^4 - 11x^3 + 22x^2 - 33x + 12;$

22) $f(x) = 6x^4 - 5x^3 + 20x^2 - 20x - 16;$

23) $f(x) = 6x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 10x - 8;$

24) $f(x) = 6x^4 + 17x^3 + 21x^2 + 15x + 4;$

25) $f(x) = 12x^4 - 13x^3 + 27x^2 - 26x + 6;$

26) $f(x) = 12x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 5x - 3;$

27) $f(x) = 12x^4 + 17x^3 + 14x^2 + 2x - 3;$

28) $f(x) = 12x^4 + 37x^3 + 53x^2 + 32x + 6;$

29) $f(x) = 12x^4 + x^3 + 3x^2 - 9x + 2;$

30) $f(x) = 12x^4 + 17x^3 + 15x^2 + 3x - 2.$

13.3. **Розклад многочленів на множники.** Розкласти даний многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C.

1) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 9$;
2) $f(x) = x^4 + 6x^2 + 25$;
3) $f(x) = x^4 - x^2 + 16$;
4) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 49$;
5) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 25$;
6) $f(x) = x^4 + 4$;
7) $f(x) = x^6 + 1331$;
8) $f(x) = x^4 + 625$;
9) $f(x) = x^6 + 64$;
10) $f(x) = x^6 + 4x^2$;
11) $f(x) = x^4 + 81$;
12) $f(x) = x^6 + 1$;
13) $f(x) = x^4 - 25$;
14) $f(x) = x^6 - 27$;
15) $f(x) = x^6 + 125$;
16) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 121$;
17) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 225$;
18) $f(x) = x^6 - 125$;
19) $f(x) = x^4 - 81$;
20) $f(x) = x^4 + 4x^2 - 5$;
21) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$;
22) $f(x) = x^4 + 16x^2 + 100$;
23) $f(x) = x^4 + 7x^2 + 64$;
24) $f(x) = x^6 - 1$;
25) $f(x) = x^5 + 4x^3 + 16x$;
26) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 9$;
27) $f(x) = x^6 + 125$;
28) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 36x$;
29) $f(x) = x^6 - 8$;
30) $f(x) = x^4 - 9x^2 + 64$.

13.4. **Розклад раціональних дробів.** За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел.

1) $\dfrac{3x^5 + x^3 + 6x - 1}{(x+1)^6}$;
2) $\dfrac{x^5 + 2x^4 - x + 1}{(x-2)^6}$;
3) $\dfrac{x^5 - 4x^3 + x^2 - 7x + 10}{(x+3)^6}$;
4) $\dfrac{x^5 + 5x^4 + 6x^2 - 3x - 2}{(x+2)^6}$;
5) $\dfrac{5x^4 - 7x^3 + 3x - 2}{(x-1)^6}$;
6) $\dfrac{x^5 - x^4 - 3x^3 - 9x + 1}{(x-3)^6}$;
7) $\dfrac{-x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5}{(x+1)^6}$;
8) $\dfrac{2x^5 - 3x^4 - 5x + 10}{(x-2)^6}$;

9) $\dfrac{-2x^5+x^3+x^2+3x-6}{(x+3)^6}$;

10) $\dfrac{2x^5-3x^4+x^3-3x^2-5}{(x+2)^6}$;

11) $\dfrac{x^4-x^4+3x^3-12}{(x-1)^6}$;

12) $\dfrac{2x^5-x^4-x^2-5x+3}{(x-3)^6}$;

13) $\dfrac{2x^5+4x^3+6x^2-10}{(x+1)^6}$;

14) $\dfrac{x^5-x^4-x^3+x+1}{(x-2)^6}$;

15) $\dfrac{x^5+2x^4+x^3-2x+1}{(x+3)^6}$;

16) $\dfrac{3x^5+4x^2-3x-2}{(x+2)^6}$;

17) $\dfrac{-x^5+2x^4+3x+2}{(x-1)^6}$;

18) $\dfrac{x^5-x^4+x^3+x^2+3}{(x-3)^6}$;

19) $\dfrac{-3x^5+2x^4+x^3-x-1}{(x+1)^6}$;

20) $\dfrac{2x^5+3x^4-4x^2+x-5}{(x-2)^6}$;

21) $\dfrac{x^5+3x^3-x^2-x+5}{(x+3)^6}$;

22) $\dfrac{2x^5+x^4-x^2+3x-2}{(x+2)^6}$;

23) $\dfrac{-3x^5+x^4+3x^2-2x+1}{(x-1)^6}$;

24) $\dfrac{x^5+x^4+2x^3-x+1}{(x-3)^6}$;

25) $\dfrac{-3x^5+x^4+x^2-x+1}{(x+1)^6}$;

26) $\dfrac{2x^5+x^2+3x+2}{(x-2)^6}$;

27) $\dfrac{x^5-3x^3+2x^2-x+4}{(x+3)^6}$;

28) $\dfrac{x^5+2x^4+3x^2-x+2}{(x+2)^6}$;

29) $\dfrac{3x^5-2x^2+x-12}{(x-1)^6}$;

30) $\dfrac{x^5+x^4-x^3-2x+3}{(x-3)^6}$.

13.5. **Розклад раціональних дробів.** Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел.

1) $\dfrac{3x^3+9x^2+16x+6}{(x^2+x+1)(x+3)(x+1)}$;

2) $\dfrac{7x^3+20x^2+23x+18}{(x^2+1)(x+3)(x+1)}$;

3) $\dfrac{6x^3+15x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+3)(x+1)}$;

4) $\dfrac{x^3+2x^2+6x-25}{(x^2+4)(x+3)(x+1)}$;

5) $\dfrac{5x^3-7x^2+x+7}{(x^2+x+1)(x-2)(x-1)}$;

6) $\dfrac{5x^3-3x^2-3x-9}{(x^2+x+3)(x-3)(x-1)}$;

7) $\dfrac{3x^3+10x^2+9x+8}{(x^2+2x+2)(x-2)(x+1)}$;

8) $\dfrac{x^3+10x^2+3x-22}{(x^2+4x+5)(x-3)(x+1)}$;

9) $\dfrac{4x^3+12x^2+25x+62}{(x^2+x+5)(x+4)(x+1)}$;

10) $\dfrac{3x^3+x^2+20x+6}{(x^2+x+1)(x+3)(x-3)}$;

11) $\dfrac{8x^2-20x+17}{(x^2-x+1)(x-2)(x-1)}$;

12) $\dfrac{x^3+10x^2-10x+63}{(x^2+2x+10)(x-3)(x+3)}$;

13) $\dfrac{4x^3+11x^2+18x+7}{(x^2+2x+2)(x-1)(x+1)}$;

14) $\dfrac{7x^3+14x^2-20x-61}{(x^2+4x+5)(x+2)(x-1)}$;

15) $\dfrac{4x^3-9x^2-135}{(x^2+9)(x+3)(x-3)}$;

16) $\dfrac{5x^3-13x^2+19x-10}{(x^2+4)(x-3)(x-2)}$;

17) $\dfrac{7x^3+2x^2+161x-4}{(x^2+16)(x-4)(x+1)}$;

18) $\dfrac{2x^3-4x^2-17x-52}{(x^2+2x+2)(x-3)(x+2)}$;

19) $\dfrac{4x^3-5x^2+23x-6}{(x^2+2x+5)(x-2)(x-1)}$;

20) $\dfrac{2x^3-29x^2+6x+41}{(4x^2+1)(x-3)(x-5)}$;

21) $\dfrac{x^3-12x^2-16x+8}{(x^2+x+2)(x+2)(x-2)}$;

22) $\dfrac{2x^3+7x^2+2x+37}{(x^2+x+10)(x+1)(x-1)}$;

23) $\dfrac{4x^3-4x^2+7x-69}{(x^2+2x+5)(x-2)(x+1)}$;

24) $\dfrac{x^3-11x^2+25x-20}{(x^2-2x+2)(x-2)(x-1)}$;

25) $\dfrac{2x^3+14x^2+5x+6}{(x^2+x+1)(x-4)(x+2)}$;

26) $\dfrac{3x^3+21x^2+20x+16}{(x^2+x+4)(x+4)(x-1)}$;

27) $\dfrac{2x^3+17x^2-22x-42}{(x^2+2x+3)(x-4)(x+6)}$;

28) $\dfrac{x^3-20x^2-19x-30}{(x^2+1)(x+3)(x-3)}$;

29) $\dfrac{x^3+16x^2-44x-4}{(x^2-2x+2)(x-3)(x+4)}$;

30) $\dfrac{3x^3-11x^2-8x-24}{(x^2+1)(x-2)(x+1)}$.

13.6. **Найбільший спільний дільник многочленів, алгоритм Евкліда.** Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$.

1) $f(x)=x^5+3x^3-x^2+2x-1, \quad g(x)=x^6+x^4+3x^3+x^2+3x+1;$

2) $f(x)=x^4-4x^3+4x^2-4x+3, \quad g(x)=x^5+2x^3+x^2+x+1;$

3) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-2x+1, \quad g(x)=x^5+x^4+x^2+3x+2;$

4) $f(x)=x^6+x^4+2x^3+x^2+2x+1, \quad g(x)=x^6+x^4+x^3+2x^2+x+2;$

5) $f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x - 1, \quad g(x) = x^6 + x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 2;$

6) $f(x) = x^5 + 3x^3 + 2x^2 + 2x + 2, \quad g(x) = x^6 + x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x - 2;$

7) $f(x) = 2x^5 + x^3 + x^2 - x + 1, \quad g(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1;$

8) $f(x) = x^4 - x^3 + 6x^2 - 3x + 9, \quad g(x) = x^5 - x^3 + 3x^2 - 12x + 9;$

9) $f(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 4, \quad g(x) = x^4 + x^3 + 7x^2 + 2x + 10;$

10) $f(x) = x^5 + 4x^3 + x^2 + 4x + 2, \quad g(x) = x^4 + x^3 + 2x - 4;$

11) $f(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 6, \quad g(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4;$

12) $f(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 3, \quad g(x) = 3x^5 + 4x^3 - x^2 + x - 1;$

13) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x - 3, \quad g(x) = x^5 + 4x^3 - x^2 + 3x - 3;$

14) $f(x) = 2x^5 + x^3 + 2x^2 + 1, \quad g(x) = x^5 - 4x^3 + x^2 - 4;$

15) $f(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 2, \quad g(x) = 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 8x - 2;$

16) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 8x - 4, \quad g(x) = x^5 + 4x^3 - 3x^2 - 12;$

17) $f(x) = x^5 - 2x^3 + 2x^2 + x - 2, \quad g(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1;$

18) $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 - 2x + 2, \quad g(x) = x^4 + 2x^3 + 2x + 4;$

19) $f(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 2, \quad g(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 3;$

20) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2x + 3, \quad g(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2;$

21) $f(x) = x^5 + x^4 - x^2 - 3x + 2, \quad g(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 2;$

22) $f(x) = x^5 - x^3 - 2x^2 - 2x + 4, \quad g(x) = x^6 - 2x^4 - x^3 + x^2 + 2x - 2;$

23) $f(x) = 2x^5 + 5x^3 + x^2 + 2x + 2, \quad g(x) = 2x^6 + 4x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 6;$

24) $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3, \quad g(x) = x^5 - 5x^3 + 3x^2 + 6x - 9;$

25) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2, \quad g(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 3x^2 + 2;$

26) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4, \quad g(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4;$

27) $f(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 - 3x + 3, \quad g(x) = 2x^5 + 6x^3 + 3x^2 + 9;$

28) $f(x) = x^5 + 3x^3 + 7x^2 + 21, \quad g(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 12x + 3;$

29) $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2, \quad g(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2;$

30) $f(x) = 3x^5 + 3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1, \quad g(x) = 3x^5 + 4x^3 - 6x^2 + x - 2.$

13.7. **Теорема Гамільтона-Келі. Мінімальний многочлен матриці.**

Знайдіть мінімальний многочлен матриці.

1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -5 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; 13) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ -6 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;14) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; 15) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$;10) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & -5 \\ -2 & -5 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \\ -2 & -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;16) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;11) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 8 & -4 \end{pmatrix}$; 17) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & -6 \\ -6 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -11 \\ -4 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;18) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 10 & 0 & -2 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$$19)\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};23)\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix};27)\ \begin{pmatrix} -2 & 2 & 10 & -2 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$20)\ \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 8 & -4 & -4 & 2 \end{pmatrix};\ \ 24)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \ 28)\ \begin{pmatrix} 5 & 2 & -10 & -12 \\ 2 & -2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$21)\ \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};25)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \ 29)\ \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 & -11 \\ -3 & -2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \\ 6 & 2 & 6 & -9 \end{pmatrix};$$

$$22)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix};\ \ 26)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -1 & 1 \\ 9 & 4 & -1 & -3 \\ 11 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix};30)\ \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & -4 \\ 4 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

14. Функції від матриць

14.1. **Знаходження функції від матриці.** Знайдіть значення вказаної функції f від матриці A

а) за допомогою жорданової форми матриці;

б) за допомогою значень функції на спектрі матриці.

$$1)\ \begin{pmatrix} -8 & 2 & 5 \\ -8 & 4 & 4 \\ -20 & 4 & 12 \end{pmatrix}, f(A) = \log_2 A; \qquad 3)\ \begin{pmatrix} -18 & -7 & -22 \\ -1 & -2 & -1 \\ 18 & 8 & 22 \end{pmatrix}, f(A) = e^A;$$

$$2)\ \begin{pmatrix} -12 & 7 & 10 \\ 4 & 0 & -4 \\ -16 & 8 & 14 \end{pmatrix}, f(A) = A^{10}; \qquad 4)\ \begin{pmatrix} -6 & -13 & 46 \\ -9 & -14 & 54 \\ -4 & -7 & 26 \end{pmatrix}, f(A) = \sqrt{A};$$

5) $\begin{pmatrix} 21 & -6 & -11 \\ 18 & -3 & -9 \\ 24 & -8 & -13 \end{pmatrix}$, $f(A) = 2^A$;

6) $\begin{pmatrix} -12 & 4 & -7 \\ -2 & 0 & -1 \\ 20 & -7 & 12 \end{pmatrix}$, $f(A) = 3^A$;

7) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(A) = \operatorname{arctg}(A)$;

8) $\begin{pmatrix} -13 & 15 & 7 \\ -6 & 7 & 3 \\ -10 & 12 & 6 \end{pmatrix}$, $f(A) = 5^A$;

9) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 8 & 7 & -12 \\ 4 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, $f(A) = \sqrt{A}$;

10) $\begin{pmatrix} 11 & -6 & 12 \\ 4 & 0 & 4 \\ -7 & 5 & -8 \end{pmatrix}$, $f(A) = A^{12}$;

11) $\begin{pmatrix} -15 & 9 & 17 \\ -1 & -1 & 1 \\ -12 & 9 & 14 \end{pmatrix}$, $f(A) = A^{10}$;

12) $\begin{pmatrix} -6 & 3 & 8 \\ -4 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $f(A) = \sqrt{A}$;

13) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f(A) = \log_2(A)$;

14) $\begin{pmatrix} 9 & -2 & -3 \\ 17 & -3 & -7 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(A) = \sin(\frac{\pi A}{4})$;

15) $\begin{pmatrix} -3 & 5 & -5 \\ 1 & 6 & -9 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$, $f(A) = e^A$;

16) $\begin{pmatrix} -6 & 25 & 17 \\ -6 & 23 & 13 \\ 7 & -25 & -13 \end{pmatrix}$, $f(A) = \sin A$;

17) $\begin{pmatrix} -22 & -7 & -11 \\ 25 & 9 & 13 \\ 25 & 8 & 12 \end{pmatrix}$, $f(A) = A^{100}$;

18) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $f(A) = \ln A$;

19) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f(A) = \sqrt{A}$;

20) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $f(A) = \operatorname{arctg} A$;

21) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $f(A) = \log_2 A$;

22) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $f(A) = e^A$;

23) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f(A) = 3^A$;

24) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$, $f(A) = \cos A$;

25) $\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$, $f(A) = A^{20}$;

26) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $f(A) = \sin \frac{A}{2}$;

27) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & -4 & -3 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, $f(A) = \cos \frac{A}{2}$;

28) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $f(A) = 5^A$;

29) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $f(A) = A^{50}$;

30) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $f(A) = \sqrt{A}$.

15. Приклади розв'язування задач

Матриці. Дії над матрицями

Приклад 1. *Вказати типи наступних матриць.*

Розв'язування. 1) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ – прямокутна матриця розміром $3{\times}2$.

2) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ – симетрична матриця третього порядку.

3) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – прямокутна матриця розміром 3×4.

4) $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одиничні матриці порядків 3 та 2.

5) $A_7 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ – кососиметрична матриця третього порядку.

6) $A_8 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ – верхня трикутна матриця третього порядку.

7) $A_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – нульова матриця другого порядку.

8) $A_{10} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ – нижня трикутна матриця другого порядку.

9) $A_{11} = \begin{pmatrix} 51 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ – діагональна матриця третього порядку.

10) $A_{12} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ – скалярна матриця третього порядку.

$\square$

Приклад 2. *Розв'язати рівняння:*

1) $3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$;

2) $2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^T - 3X^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}^T$*, де через* T *позначена операція транспонування матриці.*

Розв'язування. 1) Оскільки $3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$, то

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -9 & -12 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 \\ -16 & -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

2) Маємо, $2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^T = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Крім того, $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 + (-6) \cdot (-5) & 1 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + (-6 \cdot (-6)) \\ 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 + 3 \cdot (-5) & 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 + 3 \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 58 \\ -25 & -22 \end{pmatrix}.$$

Отже, $3X^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -10 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 43 & 58 \\ -25 & -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45 & -54 \\ 15 & 30 \end{pmatrix}$,

$$X^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -45 & -54 \\ 15 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -18 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Тоді $X = \begin{pmatrix} -15 & 5 \\ -18 & 10 \end{pmatrix}$. □

Приклад 3. *З'ясувати, чи має місце рівність* $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, *якщо* $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. *Відповідь обґрунтувати.*

Розв'язування. $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, тому ліва частина рівності дорівнює: $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 35 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

З іншого боку, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 25 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$.

$$2 \cdot A \cdot B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & -10 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тому права частина рівності дорівнює:

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} -9 & 25 \\ -10 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 26 & -10 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 15 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, порівнюючи ліву та праву частину, отримаємо:

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

Рівність не виконується, оскільки $AB \neq BA$. $\square$

Приклад 4. *Знайти куб матриці* $A = \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$.

Розв'язування. $\begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} \times$

$\times \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2\alpha - \cos^2\alpha & -2\cos\alpha \cdot \sin\alpha \\ 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -\cos2\alpha & -\sin2\alpha \\ \sin2\alpha & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin3\alpha & \cos3\alpha \\ -\cos3\alpha & -\sin3\alpha \end{pmatrix}$. $\square$

Приклад 5. *Знайти* $f\left(\text{A}\right)$, *якщо* $f\left(x\right)=3x^5+2x^4-x^3+5x^2+8x+3$ *і* $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Знайдемо всі степені матриці A:

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^4=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^5=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді $f\left(A\right)=3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+$

$$+8\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 10 & 7 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $f\left(A\right)=\begin{pmatrix} 3 & 10 & 7 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix}$.

$\square$

Визначники. Обчислення визначників.

Приклад 6. *Обчислити визначник:*

1) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$. 2) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$. 3) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & 4 \end{vmatrix}$. 4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

5) $\begin{vmatrix} 2001 & 2002 & 2003 & 2004 \\ 2005 & 2000 & 2006 & 2008 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1999 & 2002 & 2007 & 2006 \end{vmatrix}$. 6) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

Розв'язування. 1) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 14.$

2) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3{\cdot}4{\cdot}0+3{\cdot}0{\cdot}7+2{\cdot}1{\cdot}(-1)-2{\cdot}4{\cdot}3-0{\cdot}0{\cdot}1-3{\cdot}7{\cdot}(-1) = -5.$

3) Визначник дорівнює нулю, бо перший і третій стовпчики пропорційні.

4) Використаємо теорему про розклад визначника за елементами стовпця. Розкриваючи наш визначник за третім стовпчиком, одержимо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Додаючи в останньому визначнику до третього рядка другий, помножений на -3, а потім розкриваючи його за третім стовпчиком, одержимо:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = -5.$$

Отже, початковий визначник дорівнює $(-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot (-5) = -15.$

5) Віднімаючи від 1–го, 2–го і 4–го рядків відповідні кратні 3–го рядка, а потім розкриваючи його за 1–м стовпчиком, одержимо:

$$\begin{vmatrix} 2001 & 2002 & 2003 & 2004 \\ 2005 & 2000 & 2006 & 2008 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1999 & 2002 & 2007 & 2006 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix}.$$

Далі віднімемо від 2–го і 3–го стовпчиків відповідні кратні 1–го стовпчика і розкриємо за 1–м рядком:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 11 & 18 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 11 & 18 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -14.$$

6) Визначник трикутної матриці дорівнює добутку діагональних елементів, тому $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot (-1) = -6.$

$\square$

Приклад 7. *Для матриці* $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 11 & -8 \end{pmatrix}$ *знайти алгебричне доповнення та доповняльний мінор: а) до елемента “+5“; б) до елемента “0“.*

Розв'язування. а) Елемент “+5” знаходиться у третьому рядку та третьому стовпці, отже, треба знайти мінор M_{33} та алгебричне доповнення A_{33}:

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 80.$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot 80 = 80.$$

б) Елемент “0” знаходиться у четвертому рядку першому стовпці, отже, потрібно знайти M_{41} та A_{41}:

$$M_{41} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 50.$$

$A_{41} = (-1)^{4+1} \cdot 50 = -50.$ □

Приклад 8. *Для мінора M_1 , утвореного елементами 2-го, 4-го та 5-го рядків та 1-го, 3-го та 4-го стовпців матриці* $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 7 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 2 & 11 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *знайти доповняльний мінор та алгебричне доповнення .*

Розв'язування. Оскільки $M = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3$ (викреслюємо вказані рядки та стовпчики), то $A = (-1)^{(2+4+5)+(1+3+4)} \cdot M = 3.$ □

Приклад 9. *Методом опорного елементу обчислити визначник*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування. Оскільки $a_{11} \neq 0$, то його можна взяти за опорний елемент. Запишемо загальну формулу:

$$\Delta = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

У нашому випадку

$$\Delta = \frac{1}{1^{4-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Далі за опорний елемент візьмемо $a_{11} = 2$:

$$\Delta = \tfrac{1}{2^{3-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} -4 & -14 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} = -60. \qquad \square$$

Приклад 10. *Обчислити визначник* $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ *за допомогою теореми Лапласа.*

Розв'язування. Використаємо теорему Лапласа для 3 і 4 стовпців:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(2+4)+(3+4)} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \cdot (-1)^{13} \cdot 2 = 8.$$

$\square$

Приклад 11. *Обчислити визначник* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ *за допомогою теореми Лапласа.*

Розв'язування. Використаємо теорему Лапласа для 3 і 4 стовпців :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(1+2)+(3+4)} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(1+3)+(3+4)} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(1+4)+(3+4)} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(2+3)+(3+4)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(2+4)+(3+4)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(3+4)+(3+4)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -44 - 42 - 48 + 48 - 4 + 30 = -60.$$ □

Обернена матриця. Матричні рівняння.

Приклад 12. *З'ясувати, чи взаємно обернені матриці* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ *та* $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Знайдемо AB.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{2}{6} & 0 - \frac{1}{3} + \frac{2}{6} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} & 0 + \frac{1}{3} - \frac{2}{6} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{4}{6} & 0 + \frac{1}{3} + \frac{4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, матриці A та B є взаємно оберненими. □

Приклад 13. *Знайти обернену матрицю для матриці* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. За означенням $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$, де A_{ij} — алгебричні доповнення елементів. Знайдемо визначник матриці та алгебричні доповнення елементів: $\det A = 1 \cdot 8 - 2 \cdot 3$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 8 = 8, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

Тоді $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Взагалі, для $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ обернена матриця знаходиться дуже просто: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, тобто елементи головної діагоналі міняються місцями, а елементи другої діагоналі беруться з протилежним знаком. При цьому, як і в основній формулі, треба помножити знайдену матрицю на $\frac{1}{\det A}$.

Перевірка: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\square$

Приклад 14. *Знайти обернену матрицю для матриці* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Використаємо формулу : $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Знайдемо визначник матриці та алгебричні доповнення елементів:
$\det A = 13$.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}4&-1\\1&2\end{vmatrix}=9,\qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\0&2\end{vmatrix}=-4,\qquad A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-1&0\\4&-1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}2&4\\0&1\end{vmatrix}=2,\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\2&-1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-1&0\\1&2\end{vmatrix}=2,\qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1&-1\\2&4\end{vmatrix}=6.$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}=2,\qquad \text{Тоді } A^{-1}=\tfrac{1}{13}\begin{pmatrix}9&2&1\\-4&2&1\\2&-1&6\end{pmatrix}.$$

Перевірка: $A\cdot A^{-1}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&4&-1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&2&1\\-4&2&1\\2&-1&6\end{pmatrix}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}13&0&0\\0&13&0\\0&0&13\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$ $\square$

Приклад 15. *Знайти обернену матрицю для матриці* $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&4&-2\\1&0&2\end{pmatrix}$.

Розв'язування. Знайдемо обернену матрицю методом приєднаної матриці (над стрілкою вказані операції над рядками матриці): $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&4&-2&0&1&0\\1&0&2&0&0&1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow{-I+III\to III}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&4&-2&0&1&0\\0&-2&3&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{II:4\to II}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{4}&0\\0&-2&3&-1&0&1\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{II\cdot 2+III\to III}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{4}&0\\0&0&2&-1&\frac{1}{2}&1\end{array}\right)\xrightarrow{III:2\to III}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{4}&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow[III:2+II\to II]{III+I\to I}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{8}&\frac{1}{4}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow{II\cdot(-2)+I\to I}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-\frac{1}{2}&0\\0&1&0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{8}&\frac{1}{4}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{array}\right).$$

Відповідь: $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{4}&\frac{3}{8}&\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. □

Приклад 16. *Розв'язати матричне рівняння* $\begin{pmatrix}2&3\\-1&4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}9&10\\1&-5\end{pmatrix}$.

Розв'язування. Позначимо $A=\begin{pmatrix}2&3\\-1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}9&10\\1&-5\end{pmatrix}$. Тоді рівняння можна переписати у вигляді $AX=B$. Оскільки $|A|=8+3=11$, тому матриця A невироджена і для неї існує обернена матриця A^{-1}. Оскільки $AX=B$, то $A^{-1}\cdot AX=A^{-1}\cdot B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$. Позаяк
$A^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}4&-3\\1&2\end{pmatrix}$, тому
$X=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}4&-3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&10\\1&-5\end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}33&55\\11&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5\\1&0\end{pmatrix}$. □

Приклад 17. *Розв'язати матричне рівняння:*

$$\begin{pmatrix}1&0\\2&4\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3\\4&1\end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Позначимо $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}$,
$C=\begin{pmatrix}2&-3\\4&1\end{pmatrix}$. Матриці $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}$ невироджені, тому

$$A\cdot X\cdot B=C\ \Rightarrow A^{-1}\cdot AXB\cdot B^{-1}=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}.$$

Оскільки

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4&0\\-2&1\end{pmatrix},\quad B^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\end{pmatrix},$$

то

$$X=\tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=\tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -12 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -20 & 28 \\ -7 & -7 \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 18. *Розв'язати матричне рівняння.*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 1 & 9 \\ 5 & -3 & 8 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 1 & 12 & -7 \\ 20 & -17 & 8 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Аналогічно попередньому прикладу маємо:

$$A\cdot X\cdot B+C=D\Rightarrow A\cdot X\cdot B=D-C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}\cdot AXB\cdot B^{-1}=A^{-1}\cdot(D-C)\cdot B^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}\cdot(D-C)\cdot B^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\tfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix},\ B^{-1}=\tfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$D-C=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ -4 & 15 & -15 \\ 24 & -18 & 3 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ -4 & 15 & -15 \\ 24 & -18 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $X=\frac{1}{13\cdot 8}\begin{pmatrix} 266 & -91 & -210 \\ 188 & -78 & -28 \\ 1310 & -897 & -142 \end{pmatrix}$. □

Ранг матриці.

Приклад 19. *Обчислити ранг та дефект матриці* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Вказати базисний мінор.*

Розв'язування. Елементарними перетвореннями зведемо матрицю до трапецевидного вигляду: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[I\,(-3)+III \to III]{I\,(-2)+II \to II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$ $\xrightarrow{III - II \to III} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Отже, ранг матриці дорівнює 2. Тому дефект матриці дорівнює $\mathrm{def} A = n - \mathrm{rang} A = 3 - 2 = 1$. За базисний мінор візьмемо мінор, розташований у $2, 3$ стовпчиках: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$. □

Приклад 20. *Знайти ранг матриці* $A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ *в залежності від параметра* λ

Розв'язування. Матриця приведена до трикутного вигляду.

Якщо $\lambda = 1$, то $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Отже, ранг матриці дорівнює 2 (два ненульових стовпця).

Якщо $\lambda = 2$, то $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, і ранг матриці дорівнює 3.

Якщо $\lambda = 3$, то $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Отже, ранг матриці дорівнює 3.

При $\lambda \neq 1, 2, 3$ ранг матриці дорівнює 4. $\square$

Системи лінійних рівнянь.

Приклад 21. *Розв'язати систему рівнянь* $\begin{cases} y + 3z = -1, \\ 2x + 3y + 5z = 3, \\ 3x + 5y + 7z = 6. \end{cases}$

Розв'язування. Розв'яжемо дану систему, використовуючи формули Крамера.

Випишемо розширену матрицю системи рівнянь: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 6 \end{array}\right)$.

Обчислимо визначник матриці коефіцієнтів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -8 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} = 4.$$

Оскільки визначник не дорівнює нулю, то система має єдиний розв'язок. Знайдемо Δ_x, Δ_y, Δ_z, підставляючи замість стовпця відповідних коефіцієнтів стовпчик вільних членів:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 14 \\ 6 & 11 & 25 \end{vmatrix} = (-1)^2 (-1) \begin{vmatrix} 6 & 14 \\ 11 & 25 \end{vmatrix} = 4.$$

Тоді $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1$.

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 14 \\ 3 & 6 & 25 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 3 & 25 \end{vmatrix} = 8.$$

Тоді $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 2$.

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 11 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = -4.$$

Тоді $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = -1.$

Відповідь: $x = 1,\ y = 2,\ z = -1.$ □

Приклад 22. *Розв'язати систему рівнянь* $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 16, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = 23, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 10, \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$

Розв'язування. Розв'яжемо дану систему методом Ґауса. Випишемо розширену матрицю системи рівнянь: $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 2 & 1 & 16 \\ 1 & 7 & 1 & 1 & 23 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 10 \\ 4 & -3 & 4 & 6 & 1 \end{array}\right)$. Поміняємо місцями перший та другій рядки матриці. Виконаємо прямий хід методу Ґауса. Елементарними перетвореннями зведемо дану матрицю до трикутного вигляду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 1 & 1 & 23 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 16 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 10 \\ 4 & -3 & 4 & 6 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{I\cdot(-2)+III\to III \\ I\cdot(-4)+IV\to IV}]{I\cdot(-3)+II\to II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 1 & 1 & 23 \\ 0 & -17 & -1 & -2 & -53 \\ 0 & -13 & 1 & 3 & -36 \\ 0 & -31 & 0 & 2 & -91 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{II+III\to III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 1 & 1 & 23 \\ 0 & -17 & -1 & -2 & -53 \\ 0 & -30 & 0 & 1 & -89 \\ 0 & -31 & 0 & 2 & -91 \end{array}\right) \xrightarrow{III-IV\to III}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 1 & 1 & 23 \\ 0 & -17 & -1 & -2 & -53 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -31 & 0 & 2 & -91 \end{array}\right) \to \xrightarrow[III\cdot 31+IV\to IV]{III\cdot 17+II\to II}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 1 & 1 & 23 \\ 0 & 0 & -1 & -19 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -29 & -29 \end{array}\right) \xrightarrow{IV \cdot \frac{-1}{29} \to IV} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 1 & 1 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -19 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Прямий хід методу Ґауса завершено. Виконаємо зворотній хід. За допомогою четвертого рядка отримаємо нулі у четвертому стовпчику:

$$\xrightarrow[\substack{IV \cdot (1) + II \to II \\ IV \cdot (-1) + I \to I}]{IV \cdot (19) + III \to III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 1 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{III + I \to I}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II \cdot (-7) + I \to I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Отже, $x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1.$ □

Приклад 23. *Дослідити та розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування. Оскільки кількість змінних системи більша за кількість рівнянь, то дана однорідна система має нетривіальні розв'язки. Матрицю коефіцієнтів $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ даної системи елементарними перетвореннями зведемо до трапецевидного вигляду:

$$\xrightarrow[I \cdot (-3) + III \to III]{I \cdot (-2) + II \to II} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & -6 & -8 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{III : 2 \to III} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{II + III \to II} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \cdot 3 + III \to III} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[III\cdot(-4)+I\to I]{III\cdot(-1)+II\to II}\begin{pmatrix}1&3&0&-3\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{II\cdot(-3)+I\to I}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

Ранг матриці дорівнює 3. За базисний візьмемо мінор, розташований у 1–3 стовпцях. Тоді базовими змінними будуть $x_1,\ x_2,\ x_3$. Виразимо базові змінні через вільну: $\begin{cases}x_1=0\\x_2=x_4\\x_3=-x_4\end{cases}$. Нехай $x_4=A$. Тоді розв'язком системи є вектор $\begin{pmatrix}0\\A\\-A\\A\end{pmatrix}$ або $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot A,\ A\in\ R$. *Відповідь:* $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}A$, де $A\in\ R$. □

Приклад 24. *Дослідити та розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-3x_3+4x_4=1,\\2x_1+3x_2-2x_3+3x_4=2,\\4x_1+2x_2-3x_3+2x_4=3.\end{cases}$$

Розв'язування. Запишемо матрицю коефіцієнтів $\left(\begin{array}{cccc|c}3&2&-3&4&1\\2&3&-2&3&2\\4&2&-3&2&3\end{array}\right)$ або

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&-1&1&-1\\2&3&-2&3&2\\4&2&-3&2&3\end{array}\right)\xrightarrow[I\cdot(-4)+III\to II]{I\cdot(-2)+II\to II}\left(\begin{array}{cccc|c}3&2&-3&4&1\\0&5&0&1&4\\0&6&1&-2&7\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{II\cdot(-1)+III\to II}\left(\begin{array}{cccc|c}3&2&-3&4&1\\0&1&1&-3&3\\0&6&1&-2&7\end{array}\right)\xrightarrow{II\cdot(-6)+III\to III}$$

$\to\left(\begin{array}{cccc|c}3&2&-3&4&1\\0&1&1&-3&3\\0&0&-5&16&-11\end{array}\right)$. Ранг розширеної матриці збігається з рангом матриці коефіцієнтів, отже система сумісна за теоремою Кронекера–Капеллі. Ранг дорівнює 3, а кількість змінних 4, тому система має безліч розв'язків. За базові зміни візьмемо $x_1,\ x_2,\ x_3$. Виразимо базові змінні через вільну.

Нехай $x_4 = A$, тоді

$$x_3 = \frac{1}{5}(11+16A), \qquad x_2 = 3+3A-\frac{1}{5}(11+16A) = \frac{1}{5}(4-A),$$

$$x_1 = \frac{1}{3}\left(1-4A+\frac{3}{5}(11+16A)-\frac{2}{5}(4-A)\right) = \frac{1}{15}(30+30A) = 2+2A.$$

Загальний розв'язок має вигляд: $\begin{pmatrix} 2+2A \\ \frac{1}{5}(4-A) \\ \frac{1}{5}(11+16A) \\ A \end{pmatrix}$, $A \in R$, або

$\begin{pmatrix} 10+10A \\ 4-A \\ 11+16A \\ 5A \end{pmatrix}$, $A \in\ R$. *Відповідь:* $\begin{pmatrix} 10+10A \\ 4-A \\ 11+16A \\ 5A \end{pmatrix}$, $A \in\ R$. □

Приклад 25. *Розв'язати систему рівнянь* $\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-4x_5=0, \\ x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+x_3-x_4+3x_5=0. \end{cases}$.

Розв'язування. Перетворимо матрицю коефіцієнтів:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[I\cdot(-2)+III\to III]{I\cdot(-1)+II\to II} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 11 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{II+III\to III} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 14 & 1 \end{array}\right).$$

Система сумісна (ранг матриці коефіцієнтів дорівнює рангу розширеної матриці), невизначена (кількість змінних більша за ранг). Загальний розв'язок знайдемо як суму загального розв'язку відповідної однорідної системи рівнянь та часткового розв'язку неоднорідної системи рівнянь. Матриця коефіцієнтів однорідної системи має вигляд: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 14 \end{pmatrix}$. Ранг

матриці 3, дефект матриці 2 (2 вільні змінні). За базові змінні візьмемо невідомі x_2, x_3, x_4. Знайдемо вираз базових змінних через вільні x_1, x_5. Оскільки у нас дві вільні змінні, то фундаментальна система розв'язків має два вектора. Нехай $x_1 = 1,\ x_5 = 0$, тоді $x_4 = 0,\ x_3 = 0,\ x_2 = -1$. Нехай тепер $x_1 = 0,\ x_5 = 1$, тоді
$x_4 = -\frac{14}{10},\ x_3 = 3 + 5\left(-\frac{14}{10}\right) = -4,\ x_2 = 4 + 3\left(-\frac{14}{10}\right) = \frac{-1}{5}$.

Тоді загальний розв'язок має вигляд $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot A + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -20 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot B, \quad A, B \in R.$

Тепер знайдемо частковий розв'язок неоднорідної системи.
Нехай $x_1 = 0,\ x_5 = 0$, тоді $x_4 = \frac{1}{10} = 0.1,\ x_3 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$,

$x_2 = \frac{3}{10} = 0.3$, і частковим розв'язком буде вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 1.5 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot A + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -20 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot B + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 1.5 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A, B \in R.$ ☐

Приклад 26. *Розв'язати систему рівнянь* $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$

Розв'язування. Елементарними перетвореннями зведемо матрицю коефіцієнтів
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right)$ до трапецевидного вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[I\cdot(-4)+III\to III]{I\cdot(-3)+II\to II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{II\cdot(-1)+III\to III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Система несумісна, оскільки ранг матриці коефіцієнтів дорівнює 2, а ранг розширеної матриці дорівнює 3.

Відповідь: система несумісна (розв'язків не має). □

Власні числа та власні вектори.

Приклад 27. *Знайти характеристичний многочлен матриці*
$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Характеристичним многочленом матриці A називається многочлен $\det(A - \lambda E)$. Маємо:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda) - 6 = \lambda^2 + \lambda - 8.$$ □

Приклад 28. *Знайти характеристичний многочлен матриці*
$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -5 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(3-\lambda) - 6(3-\lambda) =$

$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 18.$ □

Приклад 29. *Знайти власні числа та власні вектори матриці* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Знайдемо спочатку характеристичний многочлен матриці A:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

Корені характеристичного рівняння є власними числами. Отже, з рівняння $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ маємо: $\lambda_1 = 1, \lambda_1 = 2$ – власні числа. Знайдемо власні вектори, які відповідають власному числу $\lambda_1 = 1$. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} 3-1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0, \\ -2x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$ або $2x_1 + x_2 = 0$, тобто $x_2 = -2x_1$. Нехай $x_1 = c$, тоді $x_2 = -2c$. Множину власних векторів можна записати у векторному вигляді $v_1 = \begin{pmatrix} c \\ -2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} c,\ c \in R, c \neq 0.$

Тепер знайдемо власні вектори, які відповідають власному числу $\lambda_2 = 2$. Розв'яжемо однорідну систему рівнянь
$\begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 = 0, \end{cases}$ або $x_1 + x_2 = 0$, тобто $x_2 = -x_1$. Нехай $x_1 = c$, тоді $x_2 = -c$. Множину власних векторів що відносяться до числа $\lambda_2 = 2$ можна записати у векторному вигляді

$$v_2 = \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} c,\ c \in R, c \neq 0.$$

$\square$

Приклад 30. *Знайти власні числа та власні вектори матриці*
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Характеристичний многочлен матриці A:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 3-\lambda & 3 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda - 6) = 0$$

має корені: $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 6$ – власні числа.

Знайдемо власні вектори, які відповідають власному числу $\lambda_{1,2} = 0$. Для цього розв'яжемо систему рівнянь $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$, тобто $x_1 = -x_2 - x_3$. Нехай $x_2 = c$, $x_3 = d$ тоді $x_1 = -c - d$. Множину власних векторів можна записати у векторному вигляді: $v_1 = \begin{pmatrix} -c-d \\ c \\ d \end{pmatrix}$, $c, d \in R$, $c^2 + d^2 \neq 0$. Тепер знайдемо власні вектори, які відповідають власному числу $\lambda_3 = 6$. Для цього розв'яжемо систему рівнянь $\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \end{cases} \text{або} \begin{cases} -2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases} \text{тобто} \begin{cases} 2x_2 = 3x_3, \\ x_1 + x_2 = 2x_3. \end{cases}$$

Нехай $x_3 = 2c$, тоді $x_2 = 3c$, $x_1 = c$. Множину власних векторів, що відповідають власному числу $\lambda_3 = 6$ можна записати у векторному вигляді:
$v_2 = \begin{pmatrix} c \\ 3c \\ 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} c$, $c \in R, c \neq 0$.

Відповідь: власне число $\lambda_{1,2} = 0$, власні вектори $v_1 = \begin{pmatrix} -c-d \\ c \\ d \end{pmatrix}, \ c, d \in R, c^2 + d^2 \neq \ 0,$

власне число $\lambda_3 = 6,$

власні вектори $v_2 = \begin{pmatrix} c \\ 3c \\ 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} c, \ c \in R, c \neq \ 0.$ □

Приклад 31. *Знайти власні числа та власні вектори матриці* $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$

Розв'язування. Характеристичний многочлен матриці A:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 7 \\ 1 & -4-\lambda & 9 \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 17\lambda + 13 =$$
$$= -(\lambda - 1)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 13\right) = 0$$

має корені: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2+3i, \lambda_3 = 2-3i$. Якщо матрицю розглядаємо над полем дійсних чисел, то власне число єдине, а саме $\lambda_1 = 1$. Якщо матрицю розглядаємо над полем комплексних чисел, то власних числа три, а саме

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 + 3i, \lambda_3 = 2 - 3i.$$

Знайдемо власні вектори в обох випадках.

$\lambda_1 = 1$. Розв'яжемо систему рівнянь $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 1 & -5 & 9 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 0, \\ -4x_1 + 4x_3 = 0, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = 2x_3. \end{cases}$ Нехай $x_3 = c$, тоді $\begin{cases} x_1 = c, \\ x_2 = 2c. \end{cases}$

Множину власних векторів, що відносяться до цього власного числа, можна записати у векторному вигляді $v_1 = \begin{pmatrix} c \\ 2c \\ c \end{pmatrix}, \ c \in R, \ c \neq 0$. У випадку дійсного поля розв'язання закінчено.

Розглянемо тепер випадок комплексного поля. Знайдемо власні вектори, що відносяться до комплексного числа $\lambda_2 = 2 + 3i$. Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} 2-3i & -5 & 7 \\ 1 & -6-3i & 9 \\ -4 & 0 & 3-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (2-3i)\,x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 - (6+3i)\,x_2 + 9x_3 = 0, \\ -4x_1 + (3-3i)\,x_3 = 0, \end{cases}$$

тобто $\begin{cases} 4x_1 = (3-3i)\,x_3, \\ 4x_2 = (5-3i)\,x_3. \end{cases}$ Нехай $x_3 = 4c$, тоді $\begin{cases} x_1 = (3-3i)\,c, \\ x_2 = (5-3i)\,c. \end{cases}$ Множину власних векторів, які відповідають власному комплексному числу $\lambda_2 = 2 + 3i$, можна записати у векторному вигляді

$v_2 = \begin{pmatrix} (3-3i)\,c \\ (5-3i)\,c \\ 4c \end{pmatrix}$, $c \in R, c \neq 0$.

Знайдемо власні вектори, які відповідають власному числу $\lambda_3 = 2 - 3i$. Розв'яжемо систему рівнянь $\begin{pmatrix} 2+3i & -5 & 7 \\ 1 & -6+3i & 9 \\ -4 & 0 & 3+3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2+3i)\,x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + (-6+3i)\,x_2 + 9x_3 = 0, \\ -4x_1 + (3+3i)\,x_3 = 0, \end{cases} \text{тобто} \begin{cases} 4x_1 = (3+3i)\,x_3, \\ 4x_2 = (5+3i)\,x_3. \end{cases}$$

Нехай $x_3 = 4d$, тоді $\begin{cases} x_1 = (3+3i)\,d, \\ x_2 = (5+3i)\,d. \end{cases}$ Множину власних векторів , які відповідають власному комплексному числу $\lambda_3 = 2 + 3i$, можна записати у векторному вигляді $v_3 = \begin{pmatrix} (3+3i)\,d \\ (5+3i)\,d \\ 4d \end{pmatrix}$, $d \in R, d \neq 0$.

Відповідь: Якщо матрицю розглядаємо над полем дійсних чисел, то власне число $\lambda_1 = 1$, власний вектор $v_1 = \begin{pmatrix} c \\ 2c \\ c \end{pmatrix}$, $c \in R, c \neq 0$.

Якщо матрицю розглядаємо над полем комплексних чисел, то власні числа та відповідні власні вектори:

$$\lambda_1 = 1, \text{ власний вектор } v_1 = \begin{pmatrix} c \\ 2c \\ c \end{pmatrix}, \ c \in R, c \neq 0,$$

$$\lambda_2 = 2 + 3i, v_2 = \begin{pmatrix} (3 - 3i)\,c \\ (5 - 3i)\,c \\ 4c \end{pmatrix}, \ c \in R, c \neq 0,$$

$$\lambda_3 = 2 + 3i, v_3 = \begin{pmatrix} (3 + 3i)\,d \\ (5 + 3i)\,d \\ 4d \end{pmatrix}, \ d \in R, d \neq 0. \qquad \square$$

Приклад 32. *Знайти спектр матриці* $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Знайдемо власні числа. Характеристичний многочлен матриці A:
$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 & 2 \\ 5 & 7-\lambda & 3 \\ 6 & 9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 8\lambda = -\lambda\left(\lambda^2 - 15\lambda + 8\right) = \ 0$
має корені: $\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = \frac{15+\sqrt{193}}{2}, \ \lambda_3 = \frac{15-\sqrt{193}}{2}$. Отже, спектр матриці
$\mathrm{Sp}\,(A) = \{\lambda_1, \ \lambda_2, \ \lambda_3\} = \left\{0, \frac{15+\sqrt{193}}{2}, \frac{15-\sqrt{193}}{2}\right\}$. $\square$

Діагональна матриця, степінь матриці

Приклад 33. *З'ясувати, чи можна діагоналізовати матрицю*
$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Матрицю можна звести до діагонального вигляду тоді й лише тоді, коли дефект матриці $(A - \lambda_i E)$ дорівнює кратності кореня λ_i. Знайдемо корені характеристичного многочлена. Многочлен
$\det(A - \lambda E) = 0$ або $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 + 4 = \lambda^2 = 0$ має єдиний

корінь кратності два $\lambda_{1,2} = 0$. Знайдемо дефект матриці $B = (A - 0 \cdot E)$, або $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Ранг матриці B дорівнює 1, отже дефект матриці дорівнює $2 - 1 = 1$, а кратність кореня 2, тому матрицю $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ діагоналізувати не можна. $\square$

Приклад 34. *Знайти діагональну форму матриці* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Знайдемо власні числа матриці. Коренями характеристичного многочлена

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

будуть числа $\lambda_{1,2} = -2, \lambda_3 = 1$. Один корінь має кратність 2. Підрахуємо дефект матриці $B = (A - (-2) \cdot E)$. Оскільки $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, то ранг матриці B дорівнює 1, тому дефект дорівнює 2, що збігається з кратністю кореня. Матрицю можна діагоналізувати. Запишемо діагональну форму матриці A: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, отже маємо $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\square$

Приклад 35. *Звести матрицю* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *до діагонального вигляду та вказати відповідну матрицю переходу.*

Розв'язування. Знайдемо власні числа матриці. Коренями характеристичного многочлена

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 = 0$$

будуть числа $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 6$. Власне число $\lambda = 0$ має кратність 2. Підрахуємо дефект матриці $B = (A - 0 \cdot E)$. Оскільки $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, тому ранг матриці B дорівнює 1, дефект дорівнює 2, що збігається з кратністю кореня. Матрицю можна діагоналізувати. Знайдемо власні вектори, яки відносяться до власного числа $\lambda_{1,2} = 0$. Однорідна система лінійних рівнянь

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

рівносильна одному рівнянню $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$.
Нехай $x_2 = c, x_3 = d$, тоді $x_1 = -2c - 3d$. З фундаментальної системи розв'язків $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d$ будемо мати $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,$v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_3 = 6$.
Однорідна система лінійних рівнянь $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

рівносильна системі $\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = x_3. \end{cases}$

Нехай $x_3 = 1$, тоді $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. Отже, маємо $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Отже, діагональна форма матриці має вигляд: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, матриця переходу має вигляд: $S = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. □

Приклад 36. *Обчислити A^{2021}, де матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.*

Розв'язування. Нагадаємо, що $A^m = SB^mS^{-1}$, де B–діагональний вигляд матриці A, S – матриця переходу до діагонального вигляду. Зведемо матрицю A до діагонального вигляду.

Характеристичний многочлен $\det(A - \lambda E) = 0$ або $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ має корені $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$. Знайдемо власні вектори для відповідних власних чисел. $\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

тобто $x_1 = x_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} c,\ c \in R, c \neq 0,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = -1$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

тобто $x_1 = 0, x_2 = d \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d,\ d \in R, d \neq 0,\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Діагональна форма матриці A: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Матриця переходу має вигляд: $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Обчислимо $B^{2021} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{2021} =$

$= \begin{pmatrix} 1^{2021} & 0 \\ 0 & (-1)^{2021} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Оскільки $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, то

$$A^{2021} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A^{2021} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. $\square$

Приклад 37. *Обчислити A^m, де матриця* $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Оскільки $A^m = SB^mS^{-1}$, то знайдемо матрицю B–діагональний вигляд матриці A та матрицю переходу S. Зведемо матрицю A до діагонального вигляду. Коренями характеристичного многочлена

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 4\right) = 0$$

будуть числа $\lambda_{1,2} = 2, \lambda_3 = 1$. Власне число $\lambda = 2$ має кратність 2. Підрахуємо дефект матриці $B_1 = (A - 2 \cdot E)$. Оскільки $B_1 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, ранг матриці B_1 дорівнює 1, дефект дорівнює 2, що співпадає з кратністю кореня. Матрицю можна діагоналізувати. Знайдемо власні вектори, які відповідають власному числу $\lambda_{1,2} = 2$. Однорідна система лінійних рівнянь

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

рівносильна одному рівнянню $-3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$. Нехай $x_1 = c, x_2 = d$, тоді $x_3 = -3c + 3d$. З фундаментальної системи розв'язків $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} c + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} d$ будемо мати $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_3 = 1$. Однорідна система лінійних рівнянь

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

рівносильна системі $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 = 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = x_3. \end{cases}$

Нехай $x_3 = 1$, тоді $x_1 = 1, x_2 = 1$. Отже, маємо $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Отже, діагональна форма матриці A має вигляд: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, матриця переходу має вигляд: $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Знайдемо B^m та S^{-1}.

Маємо $B^m = \begin{pmatrix} 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 1^m \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Тому

$$A^m = SB^mS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 1^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^m = \begin{pmatrix} 2^m & 0 & 1 \\ 0 & 2^m & 1 \\ -3 \cdot 2^m & 3 \cdot 2^m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \cdot 2^m + 3 & 3 \cdot 2^m - 3 & 1 - 2^m \\ -3 \cdot 2^m - 3 & 4 \cdot 2^m - 3 & -2^m + 1 \\ -3 \cdot 2^m + 3 & 3 \cdot 2^m - 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A^m = \begin{pmatrix} -2 \cdot 2^m + 3 & 3 \cdot 2^m - 3 & 1 - 2^m \\ -3 \cdot 2^m - 3 & 4 \cdot 2^m - 3 & -2^m + 1 \\ -3 \cdot 2^m + 3 & 3 \cdot 2^m - 3 & 1 \end{pmatrix}$. □

Лінійні оператори.

Приклад 38. *З'ясувати, чи буде лінійним оператор* $f : E^2 \to E^2$, *якщо в базисі* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ *для будь-якого елемента* $x \in E^2$ *виконується* $f(x) = \overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2}$.

Розв'язування. За означенням оператор f буде лінійним, якщо для довільних елементів простору виконуються умови:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Перевіримо ці умови.

$$f(x) = \overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2}, \quad f(y) = \overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2},$$

$$f(x) + f(y) = 2\overrightarrow{e_1} - 6\overrightarrow{e_2}, \; f(x+y) = \overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2}.$$

Перша умова не виконується, оператор не є лінійним. □

Приклад 39. *З'ясувати, чи буде лінійним оператор* $f : R \to R$, *якщо для будь-якого елемента* $\alpha \in R$ *виконується*

1) $f(\alpha) = 3\alpha$. 2) $f(\alpha) = 2^{\alpha}$. 3) $f(\alpha) = \alpha^3$.

Розв'язування. Перевіримо умови лінійності оператора f.

1) $f(\alpha_1) = 3\alpha_1$, $f(\alpha_2) = 3\alpha_2$,
$f(\alpha_1) + f(\alpha_2) = 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 3(\alpha_1 + \alpha_2) = f(\alpha_1 + \alpha_2)$.
$f(\lambda\alpha) = 3(\lambda\alpha) = \lambda(3\alpha) = \lambda f(\alpha)$.
Умови виконується, оператор є лінійним.
2) $f(\alpha_1) = 2^{\alpha_1}$, $f(\alpha_2) = 2^{\alpha_2}$,
$f(\alpha_1) + f(\alpha_2) = 2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} \neq 2^{\alpha_1+\alpha_2} = f(\alpha_1 + \alpha_2)$.
Перша умова не виконується, оператор не є лінійним.
3) $f(\alpha_1) = \alpha_1^3$, $f(\alpha_2) = \alpha_2^3$,
$f(\alpha_1) + f(\alpha_2) = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 \neq f(\alpha_1 + \alpha_1) = (\alpha_1 + \alpha_2)^3$.
Перша умова лінійності не виконується, оператор не є лінійним.

□

Приклад 40. *З'ясувати, чи буде лінійним оператор $f : E^3 \to E^3$, якщо в базі $\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3}$ для будь-якого елемента $x \in E^3$ виконується умова $f(x) = (\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{x})\,\overrightarrow{e_2}$.*

Розв'язування. Перевіримо умови лінійності.

$$f(x_1) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{x_1})\,\overrightarrow{e_2}, \quad f(x_2) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{x_2})\,\overrightarrow{e_2},$$

$$f(x_1) + f(x_2) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{x_1})\,\overrightarrow{e_2} + (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{x_2})\,\overrightarrow{e_2} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_1})\,\overrightarrow{e_2} = f(x_1 + x_2),$$

$$f(\lambda x) = (\overrightarrow{e_1}, \lambda\,\overrightarrow{x})\,\overrightarrow{e_2} = \lambda\,(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{x})\,\overrightarrow{e_2} = \lambda f(x).$$

Умови виконуються, оператор є лінійним. □

Приклад 41. *З'ясувати, чи буде лінійним оператор $f : R_n[x] \to R_n[x]$, якщо для будь-якого елемента $p(x) \in R_n[x]$ виконується умова $f(p(x)) = p'(x)$. Де $R_n[x]$ - простір многочленів степеня, що не перевищує n.*

Розв'язування. Перевіримо умови лінійності.

$$f(p(x)) = p\,'(x), \quad f(q(x)) = q\,'(x),$$

$$f(p(x) + q(x)) = (p(x) + q(x))\,' = p'(x) + q'(x) = f(p(x)) + f(q(x)),$$

$$f(\lambda p(x)) = (\lambda p(x))\,' = \lambda p'(x) = \lambda f(p(x)).$$

Умови виконуються, оператор є лінійним. □

Приклад 42. *Нехай $M_{n\times n}(R)$– множина дійсних квадратних матриць порядку n. З'ясувати, чи буде лінійним оператор $f : M_{n\times n}(R) \to M_{n\times n}(R)$, якщо для будь-якого елемента $A \in R_{n\times n}$ виконується умова $f(A) = A^T$.*

Розв'язування. Перевіримо умови лінійності:

$$f(A) = A^T,\ f(B) = B^T,$$

$$f(A + B) = (A + B)^T = A^T + B^T = f(A) + f(B),$$

$$f(\lambda A) = (\lambda A)^T = \lambda\,(A)^T = \lambda f(A).$$

Умови виконуються, оператор є лінійним. □

Приклад 43. *Знайти матрицю лінійного оператора $f : R^4 \to R^4$, що переводить довільний вектор $\overrightarrow{x}\,(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3;\ \alpha_4)$ у вектор*

$$\overrightarrow{y}\,(\alpha_1-\alpha_4;\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4;\ \alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3;\ 2\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3+3\alpha_4)\,.$$

Розв'язування. Стовпчиками матриці оператора є стовпчики координат образів векторів базису. Маємо:

$$f\,(\overrightarrow{e_1})=a_{11}\overrightarrow{e_1}+a_{21}\overrightarrow{e_2}+...+a_{41}\overrightarrow{e_4},\quad f\,(\overrightarrow{e_2})=a_{12}\overrightarrow{e_1}+a_{22}\overrightarrow{e_2}+...+a_{42}\overrightarrow{e_4},$$

$$f\,(\overrightarrow{e_3})=a_{13}\overrightarrow{e_1}+a_{23}\overrightarrow{e_2}+...+a_{43}\overrightarrow{e_4},\quad f\,(\overrightarrow{e_4})=a_{14}\overrightarrow{e_1}+a_{24}\overrightarrow{e_2}+...+a_{44}\overrightarrow{e_4}.$$

Тому стовпчиками матриці оператора будуть відповідно $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\3\end{pmatrix}$ і матриця оператора має вигляд: $A=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&1\\1&-2&1&0\\2&1&-2&3\end{pmatrix}.$ $\square$

Приклад 44. *Нехай лінійний оператор $f : M_{2\times2}\,(R)\to M_{2\times2}\,(R)$ переводить довільну матрицю $A\in M_{2\times2}\,(R)$ у матрицю $f\,(A)=A\begin{pmatrix}-1&3\\2&4\end{pmatrix}$. Знайти матрицю цього лінійного оператора у базисі*

$$\overrightarrow{e_1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{e_2}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{e_3}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{e_4}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Маємо:

$$f\,(\overrightarrow{e_1})=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3\\0&0\end{pmatrix}=-1\overrightarrow{e_1}+3\overrightarrow{e_2}+0\overrightarrow{e_3}+0\overrightarrow{e_4},$$

$$f\,(\overrightarrow{e_2})=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\0&0\end{pmatrix}=2\overrightarrow{e_1}+4\overrightarrow{e_2}+0\overrightarrow{e_3}+0\overrightarrow{e_4},$$

$$f\left(\overrightarrow{e_3}\right)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\-1&3\end{pmatrix}=0\overrightarrow{e_1}+0\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{e_3}+3\overrightarrow{e_4},$$

$$f\left(\overrightarrow{e_4}\right)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\2&4\end{pmatrix}=0\overrightarrow{e_1}+0\overrightarrow{e_2}+2\overrightarrow{e_3}+4\overrightarrow{e_4}.$$

Тому матриця оператора $f\left(A\right)$ буде мати вигляд: $f\left(A\right)=\begin{pmatrix}-1&2&0&0\\3&4&0&0\\0&0&-1&2\\0&0&3&4\end{pmatrix}$.

$\square$

Приклад 45. *Нехай відомі координати вектора $\overrightarrow{x}$ та матриця лінійного оператора f у базисі $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$. Знайти координати вектора $\overrightarrow{y}=f\left(\overrightarrow{x}\right)$ у цьому ж базисі $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$, якщо :*

1) $\overrightarrow{x}=\left(2;-1;3\right),\ A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&3&1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

2) $\overrightarrow{x}=\left(2;-1;3\right),\quad B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.

Розв'язування. 1) За формулою $f\left(\overrightarrow{x}\right)=AX$ маємо:

$$f\left(\overrightarrow{x}\right)=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&3&1\\0&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}.$$

2) Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{y}=f\left(\overrightarrow{x}\right)$, не використовуючи формули $f\left(\overrightarrow{x}\right)=AX$. Оскільки f лінійне відображення, то

$$\overrightarrow{y}=f\left(\overrightarrow{x}\right)=f\left(2\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}+3\overrightarrow{e_3}\right)=2f\left(\overrightarrow{e_1}\right)-f\left(\overrightarrow{e_2}\right)+3f\left(\overrightarrow{e_3}\right).$$

За означенням матриці лінійного відображення

$$f\left(\overrightarrow{e_1}\right)=1\overrightarrow{e_1}+1\overrightarrow{e_2},$$

$$f\left(\overrightarrow{e_2}\right)=1\overrightarrow{e_2}+1\overrightarrow{e_3},$$

$$f\left(\overrightarrow{e_3}\right) = 1\overrightarrow{e_1} + 1\overrightarrow{e_3}.$$

Тоді

$$\overrightarrow{y} = 2\left(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\right) - \left(\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}\right) + 3\left(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}\right) = 5\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}.$$

Отже, координати вектора $\overrightarrow{y}$ дорівнюють $y = (5; 1; 2)$. □

Приклад 46. *У просторі E_2 задані вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$. Оператор f переводить ці вектори у вектори $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}$ відповідно. Знайти матрицю оператора f у базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$, якщо $\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{b_1} = 3\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{b_2} = 6\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2}$.*

Розв'язування. За умовою задачі

$$f\left(\overrightarrow{a_1}\right) = f\left(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}\right) = \overrightarrow{b_1} = 3\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2},\ \ f\left(\overrightarrow{a_2}\right) = f\left(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\right) = \overrightarrow{b_2} = 6\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2}.$$

Із лінійності оператора f маємо

$$f\left(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}\right) = f\left(\overrightarrow{e_1}\right) - f\left(\overrightarrow{e_2}\right),\ \ f\left(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\right) = f\left(\overrightarrow{e_1}\right) + f\left(\overrightarrow{e_2}\right).$$

Тепер із системи $\begin{cases} f\left(\overrightarrow{e_1}\right) - f\left(\overrightarrow{e_2}\right) = 3\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}, \\ f\left(\overrightarrow{e_1}\right) + f\left(\overrightarrow{e_2}\right) = 6\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2}, \end{cases}$ знаходимо

$\begin{cases} f\left(\overrightarrow{e_1}\right) = 4.5\overrightarrow{e_1} - 1.5\overrightarrow{e_2}, \\ f\left(\overrightarrow{e_2}\right) = 1.5\overrightarrow{e_1} - 0.5\overrightarrow{e_2}. \end{cases}$ Тому матриця оператора f має вигляд

$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. □

Перетворення матриці лінійного оператора при переході до іншого базису.

Приклад 47. *Знайти матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо $\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} - 4\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_2} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_3} = 4\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}$.*

Розв'язування. Матриця переходу має такий вигляд: $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

□

Приклад 48. *Дана матриця* $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *переходу від базису* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ *до базису* $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$*. Знайти координати вектора:*

1) $\overrightarrow{f_2}$ *у базисі* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$*;* 2) $\overrightarrow{e_3}$ *у базисі* $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$*.*

Розв'язування. Матриця переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$ відома, отже ми знаємо координати вектора $\overrightarrow{f_2}$ у базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$:
$\overrightarrow{f_2} = -\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$.

Тоді щоб знайти координати вектора $\overrightarrow{e_3}$ у базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$ треба знайти матрицю переходу від базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$ до базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$:

$$T^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Маємо : $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{f_1} + 2\overrightarrow{f_2} + 3\overrightarrow{f_3}$. □

Приклад 49. *Знайти матицю переходу від базису* $\overrightarrow{e_1}$*,* $\overrightarrow{e_2}$*,* $\overrightarrow{e_3}$ *до базису* $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$*, та матрицю переходу від* $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$ *до базису* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$*, якщо* $\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_3}$*,* $\overrightarrow{f_2} = 3\overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_2}$*,* $\overrightarrow{f_3} = 3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}$*.*

Розв'язування. Матриця переходу від $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$ буде мати такий вигляд: $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Визначник цієї матриці дорівнює 4.

Матриця переходу від базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$ до базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ дорівнює:

$$T^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 9 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 50. *Знайти координати вектора* $\overrightarrow{x}$ *в базисі* $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, *якщо відомі координати вектора* $\overrightarrow{x}$, *та координати векторів* $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$ *у базисі* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$*:*
$\overrightarrow{x} = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 7\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} - 3\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} - 5\overrightarrow{e_3}$.

Розв'язування. Запишемо матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$:
$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Оскільки $X_e = T \cdot X_f$, де $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, то $X_f = T^{-1} \cdot X_e$

$$X_f = \tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 34 \\ -8 \\ -32 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 17 \\ -4 \\ -16 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Приклад 51. *Відомі координати векторів* $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{x}$ *у базисі* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$*. Впевнитись, що вектори* $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, *утворюють базис та знайти координати вектора* $\overrightarrow{x}$ *у базисі* $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, *якщо:*

$\overrightarrow{a_1} = (1; 2; 3)$, $\overrightarrow{a_2} = (-1; 4; 0)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 0; 0)$, $\overrightarrow{x} = (5; 2; -6)$.

Розв'язування. Запишемо матрицю системи векторів $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$:
$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Оскільки визначник матриці T не дорівнює нулю, то дані вектори утворюють базис і матриця T є матрицею переходу до нової базису $X_e = T \cdot X_a$, де
$X_e = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, тоді $X_a = T^{-1} \cdot X_e$,

$$X_a = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \\ -12 & -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} 24 \\ -18 \\ -102 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Приклад 52. *Знайти матрицю переходу від базиса $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ до базису $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо відомі розклади цих векторів у деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$:*

$$\overrightarrow{a_1} = 3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}, \quad \overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}, \quad \overrightarrow{a_3} = 2\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3};$$
$$\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}, \quad \overrightarrow{b_2} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3}, \quad \overrightarrow{b_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}.$$

Розв'язування. Нехай S– матриця переходу від базиса $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, T– матриця переходу від базиса $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$. Треба знайти матрицю Q– матрицю переходу від базиса $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ до базису $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$.

$$\begin{tikzcd}
(\overrightarrow{a_i}) \arrow[rr, "Q"] \arrow[dr, shift left, "S^{-1}"] & & \left(\overrightarrow{b_i}\right) \\
& (\overrightarrow{e_i}) \arrow[ul, shift left, "S"] \arrow[ur, "T"'] &
\end{tikzcd}$$

$$(\overrightarrow{a_i}) = (\overrightarrow{e_i})\, S, \quad \left(\overrightarrow{b_i}\right) = (\overrightarrow{e_i})\, T, \quad (e_i) = (a_i)\, S^{-1},$$
$$\left(\overrightarrow{b_i}\right) = (\overrightarrow{a_i})\, S^{-1}T, \quad Q = S^{-1}T,$$

де $S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Отже, $Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$Q = \tfrac{1}{-20} \begin{pmatrix} -8 & -1 & 6 \\ -4 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{-20} \begin{pmatrix} -9 & -14 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 12 & -6 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Приклад 53. *Нехай відоми два базиса $\overrightarrow{e_i}$ та $\overrightarrow{f_i}$ лінійного простору та матриця A лінійного оператора g у базисі $\overrightarrow{e_i}$. Знайти матрицю оператора g у базисі $\overrightarrow{f_i}$, якщо:*

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{f_1} = 3\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{f_2} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$.

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{f_2} = 2\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{f_3} = -\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{e_3}$.

Розв'язування. 1) Нагадаємо, що $A_f = T^{-1}A_eT$, де T–матриця переходу від базиса $\overrightarrow{e_i}$ до базису $\overrightarrow{f_i}$.

Запишемо матрицю переходу: $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Тоді $T^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Маємо

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 14 \\ -41 & -21 \end{pmatrix}.$$

2) Оскільки $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, тоді $T^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. Маємо:

$$A_f = T^{-1}A_eT = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_f = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & 5 & -9 \\ -1 & 13 & -6 \\ 8 & 16 & -9 \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 54. *У просторі E^2 задано базис $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$. Знайти в базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ матрицю оператора симетрії відносно осі OY.*

Розв'язування. Матриця оператора симетрії відносно осі OY у початковому базисі має вигляд: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Матриця переходу $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, тому $T^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, та $A = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. □

Операції над лінійними операторами. Взаємно обернені оператори.

Приклад 55. *Нехай відображення f у базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ має матрицю $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, а відображення g у базисі $\overrightarrow{e_1}\,' = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_2}\,' = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$ має матрицю $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю відображення:*

1) *$f - 2g$ у базисі $\overrightarrow{e_1}\,'$, $\overrightarrow{e_2}\,'$.* 2) *$f \circ g$ у базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$.*

Розв'язування. Матриця переходу від базиса $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ до базису $\overrightarrow{e_1}\,'$, $\overrightarrow{e_2}\,'$ дорівнює $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, а матриця $T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ є матрицею переходу від базиса $\overrightarrow{e_1}\,'$, $\overrightarrow{e_2}\,'$ до базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$.

1) Знайдемо матрицю оператора f у базисі $\overrightarrow{e_1}\,'$, $\overrightarrow{e_2}\,'$:

$$A_{e'} = T^{-1}A_eT = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця відображення $f - 2g$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

2) Знайдемо матрицю оператора g у базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$:

$$B_e = TB_{e'}T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця відображення $f \circ g$: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 12 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & -29 \\ 81 & -47 \end{pmatrix}$.

$\square$

Приклад 56. *Нехай відображення f у базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ має матрицю* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, *а відображення g у базисі $\overrightarrow{e_1}\,' = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{e_2}\,' = -\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{e_3}\,' = \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1}$ має матрицю* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Знайти матрицю відображення*

1) *$f \circ g$ у базисі $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$.*

2) *$f \circ g$ у базисі $\overrightarrow{e_1}\,'$, $\overrightarrow{e_2}\,'$, $\overrightarrow{e_3}\,'$.*

Розв'язування. Матриця T переходу від базиса $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{e_1}\,'$, $\overrightarrow{e_2}\,'$, $\overrightarrow{e_3}\,'$ дорівнює $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, а матриця $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ є матрицею переходу від базиса $\overrightarrow{e_1}\,'$, $\overrightarrow{e_2}\,'$, $\overrightarrow{e_3}\,'$ до базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$.

1) Знайдемо матрицю оператора g у базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Оскільки, $TB_{e\,'} = B_eT$, то $B_e = TB_{e\,'}T^{-1}$. Тому

$$B_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = B_e.$$

Отже, матриця відображення $f \circ g$ у базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$:

$$f \circ g = A_e \cdot B_e = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \\ 5 & 13 & -2 \end{pmatrix}.$$

2) Знайдемо матрицю оператора f у базисі $\overrightarrow{e_1}\,', \ \overrightarrow{e_2}\,', \ \overrightarrow{e_3}\,'$.

Оскільки, $TA_{e\,'} = A_eT$, то $A_{e\,'} = T^{-1}A_eT$. Тому

$$A_{e\,'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A_{e\,'}.$$

Тоді матриця відображення $f \circ g$ у базисі $\overrightarrow{e_1}\,', \ \overrightarrow{e_2}\,', \ \overrightarrow{e_3}\,'$:

$$A_{e\,'} \cdot B_{e\,'} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ -2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 57. *У деякому базисі простору V задана матриця A лінійного оператора f. З'ясувати, чи існує обернений оператор f^{-1}. Якщо так, то знайти матрицю оберненого оператора у тому ж базисі, якщо:*

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Обернений оператор існує тоді й лише тоді, коли даний оператор невироджений, і в цьому випадку матриця оберненого оператора буде оберненою до матриці даного оператора.

1) $\det A = -28$. Отже, обернений оператор існує. Знайдемо його матрицю:
$$A^{-1} = \frac{1}{-28}\begin{pmatrix} -4 & 19 & -8 \\ 12 & -8 & -4 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$
2) $\det A = 0$. Оскільки оператор вироджений, то оберненого оператора не існує.

$\square$

Ядро, область значень лінійного оператора.

Приклад 58. *Знайти ядро, область значень, ранг та дефект лінійного оператора $f : V \to V$ з матрицею A, якщо* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. За означенням, ядром оператора $f : V \to V$ називається множина векторів x простору V, які відображенням f переводяться у нульовий вектор, тобто для яких $Ax = 0$. Отже, для знаходження ядра треба розв'язати систему однорідних рівнянь: $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Обчислимо ранг матриці системи:
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \cdot I + II \to II} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{6 \cdot III - II \to III} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, ранг матриці дорівнює 3, і система має єдиний тривіальний розв'язок, тобто $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Ядро буде складатися з одного нульового вектора. Оскільки ядро тривіальне, то область значень оператора буде збігатися з простором V, тобто $\mathrm{Im} f = V$. Нарешті, $\mathrm{def} A = 3 - 3 = 0$. $\square$

Приклад 59. *Знайти ядро, область значень, ранг та дефект лінійного оператора* $f : V \to V$ *з матрицею* A, *якщо* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Для знаходження ядра оператора $f : V \to V$ треба розв'язати систему однорідних рівнянь: $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$ Знайдемо ранг матриці системи:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I + II - III \to III} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3 \cdot I + II \to II} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки ранг матриці дорівнює 2, то система має нетривіальні розв'язки. За базовий мінор візьмемо ненульовий мінор, розташований у 1, 2 стовпцях. Повернемося до системи рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_2 = 7x_3, \\ x_1 = \frac{7}{4}x_3 - 2x_3 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = \frac{7}{41}x_3, \\ x_1 = -\frac{1}{4}x_3 \end{cases}, \text{ тобто } \ker f = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} t, \ t \in R.$$

Оскільки ядро нетривіальне, то область значень оператора буде збігатися з простором напнутим на вектори базових змінних, тобто

$$\mathrm{Im} f = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \beta, \ \forall \alpha, \beta \in R.$$

Нарешті, $\mathrm{def} A = 3 - 2 = 1$. $\square$

Комплексні числа та дії над ними

Приклад 60. *Запишіть комплексне число* $z = \frac{2-4i}{3+i} + (1-i)^3 + i^{127}$ *в алгебричній форме, знайдіть дійсну та уявну частини даного комплексного числа, модуль цього комплексного числа.*

Розв'язування. $z = \frac{2-4i}{3-i} + (1-i)^3 + i^{127} = \frac{(2-4i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} + (1-i)^2(1-i) + i^{124}i^3 =$ $= \frac{(6+4)+(2i-12i)}{9+1} + (1-2i-1)(1-i) + i^3 = 1-i-2i-2-i = -1-4i$. Маємо $\mathrm{Re}z = -1$, $\mathrm{Im}z = -4$. Тоді з $|z| = \rho = \sqrt{(\mathrm{Re}z)^2 + (\mathrm{Im}z)^2}$ маємо

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}.$$

За означеням $\mathrm{tg}\varphi = \frac{\mathrm{Im}z}{\mathrm{Re}z}$, тобто $\mathrm{tg}\varphi = \frac{-4}{-1} = 4$. Оскільки число $z = -1-4i$ знаходиться у третій чверті, то $\arg z = \varphi = (\mathrm{arctg}4) - \pi$. □

Приклад 61. *Подати число* $z = 3i - \sqrt{3}$ *у тригонометричній формі, вказати модуль та агрумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайти* 50*-ий степінь числа.*

Розв'язування. Подамо комплексне число $z = 3i - \sqrt{3}$ у тригонометричній формі. Маємо $\mathrm{Re}z = -\sqrt{3}$, $\mathrm{Im}z = 3$. Тоді

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (3)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{3}{-\sqrt{3}}.$$

Число знаходиться у другій чверті, тому

$$\arg z = (\mathrm{arctg}(-\sqrt{3})) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

За формулою Муавра піднесення до степеня

$$z^n = (\rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = \rho^n\,(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

маємо

$$z = 2\sqrt{3}(\cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3}),$$

$$z = (2\sqrt{3})^{50}(\cos(50 \cdot \frac{2\pi}{3}) + i\sin(50 \cdot \frac{2\pi}{3})),$$

$$z = 2^{50}3^{25}(\cos\frac{100\pi}{3} + i\sin\frac{99\pi + \pi}{3}),$$

$$z = 2^{50}3^{25}(\cos(\pi + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{3})),$$

$$z = 2^{50}3^{25}(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}) = 2^{50}3^{25}(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

$\square$

Приклад 62. *Знайти всі значення* $\sqrt[5]{8\sqrt{3}+8i}$ *та зобразити їх на комплексній площині.*

Розв'язування. Позначимо $z = 8\sqrt{3} + 8i$, причому $\mathrm{Re}z = 8\sqrt{3}$, $\mathrm{Im}z = 8$. Подамо це комплексне число у тригонометричній формі: $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де $\rho = \sqrt{(\mathrm{Re}z)^2 + (\mathrm{Im}z)^2}$ та $\mathrm{tg}\varphi = \frac{\mathrm{Im}z}{\mathrm{Re}z}$.

Маємо $\rho = \sqrt{3\cdot 8^2 + 8^2} = \sqrt{4\cdot 8^2} = 16$. Оскільки число z розташоване у першій чверті, то $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{8}{8\sqrt{3}} = \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$. Згідно другої формули Муавра

$\sqrt[n]{z} = \varpi_k = \sqrt[n]{\rho}(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}), \quad k = 0, 1, 2, ..., (n-1).$

$\varpi_k = \sqrt[5]{16}(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{5}),$

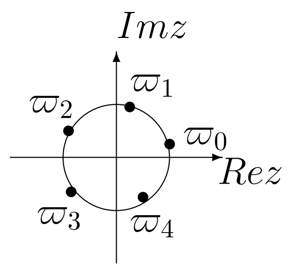
$k = 0 \quad \Rightarrow \quad \varpi_0 = \sqrt[5]{16}(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+0}{5} + i\sin\frac{\pi}{30}),$

$k = 1 \quad \Rightarrow \quad \varpi_1 = \sqrt[5]{16}(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi}{5} + i\sin\frac{13\pi}{30}),$

$k = 2 \quad \Rightarrow \quad \varpi_2 = \sqrt[5]{16}(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+4\pi}{5} + i\sin\frac{25\pi}{30}),$

$k = 3 \quad \Rightarrow \quad \varpi_3 = \sqrt[5]{16}(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+6\pi}{5} + i\sin\frac{37\pi}{30}),$

$k = 4 \quad \Rightarrow \quad \varpi_4 = \sqrt[5]{16}(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+8\pi}{5} + i\sin\frac{49\pi}{30}).$



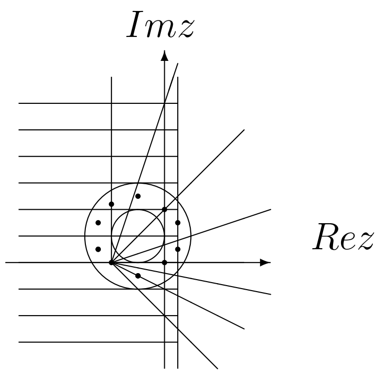
На комплексній площині точки $\varpi_0, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \varpi_4$ є вершинами правильного п'ятикутника, вписаного в коло з центром в точці $z_0 = 0$ та радіусом $R = \sqrt[5]{16}$. Промені $\varphi = \frac{\pi}{30}, \varphi = \frac{13\pi}{30}\varphi = \frac{25\pi}{30}, \varphi = \frac{37\pi}{30}, \varphi = \frac{49\pi}{30}$ перетинають коло саме в цих точках. $\square$

Приклад 63. *На комплексній площині зобразіть область, що задовольняє умови*
$$\begin{cases} 1 < |z - 3 - 2i| \leq 3, \\ -\pi/4 \leq arg(z+2) \leq \pi/6, \\ Rez \leq 1. \end{cases}$$

Розв'язування. Позначимо $z = x + iy$. Відомо, що $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тоді з

$$z + 1 - i = xr + iy + 1 - i = (x + 1) + i(y - 1)$$

отримаємо $|z + 1 - i| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = R$,
тобто $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = R^2$. Таким чином, перша нерівність визначає множину точок кільця з центром в точці $z_0 = i - 1$ та радіусами $R_1 = 1, \quad R_2 = 3$, причому точки малого кола не включаємо (нерівність строга). Друга нерівність визначає множину точок нескінченного сектора з центром в точці $z = -2$, та обмеженого променями $\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ (виходять з точки $z = -2$). Третя нерівність задає множину точок для яких Re$z \leq 1$ (тобто $x \leq 1$).



Шукана область буде перетином даних множин.

$\square$

Приклад 64. *Лінійний оператор $f : E^3 \to E^3$ має в деякому ортонормованому базисі матрицю* $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. *Знайти матрицю A^* спряженого оператора f^* у цьому ж базисі.*

Розв'язування. Оскільки базис ортонормований, то $A^* = A^T$.

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$ □

Приклад 65. *Оператор* $f : E^2 \to E^2$ *має в деякому ортонормованому базисі* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ *матрицю* $A_e = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. *Знайти матрицю спряженого оператора* f^* *у базисі* $\overrightarrow{g_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{e_1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{e_2}, \quad \overrightarrow{g_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{e_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{e_2}$.

Розв'язування. Матриця A_e^* спряженого оператора f^* у базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ має вигляд $A_e^* = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Запишемо матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ до базису $\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}$: $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Матрицю A_g^* спряженого оператора f^* у базисі $\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}$ знайдемо за формулою $A_g^* = T^{-1}A_e^*T$. Оскільки $T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, то

$$A_g^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 66. *З'ясувати, чи можна в просторі многочленів з дійсними коефіцієнтам, степені яких не перевищують 2, визначити скалярний добуток формулою* $(f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0)$?

Розв'язування. Треба перевірити аксіоми, які має задовольняти скалярний добуток у дійсному лінійному просторі:

$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = (\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})$ (симетричність),

$(\alpha\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \alpha(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ (лінійність за першим аргументом),

$(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}) = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}) + (\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$,

$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) \geq 0$ (невід'ємність скалярного добутку), причому $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0$ тільки при $\overrightarrow{x} = 0$.

1) $(f,g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) = g(-1)f(-1) + g(0)f(0) = (f,g)$. Таким чином, симетричність має місце.
2) $(\alpha f, g) = \alpha f(-1)g(-1) + \alpha f(0)g(0) = \alpha(f(-1)g(-1) + f(0)g(0)) = \alpha(f,g)$, отже, має місце однорідність.
3) $(f+h,g) = (f(-1)+h(-1))g(-1)+(f(0)+h(0))g(0) = f(-1)g(-1)+f(0)g(0) + h(-1)g(-1) + h(0)g(0) = (f,g) + (h,g)$, отже, має місце лінійність.
4) $(f,f) = f^2(-1) + f^2(0) \geq 0$. З'ясуємо, коли виконується рівність $(f,f) = 0$. З рівності $f^2(-1) + f^2(0) = 0$ випливає, що $f(-1) = f(0) = 0$. Для многочлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ з цих умов випливає, що $c = 0$ та $a = b$. Таким чином, для кожного многочлена $f(x) = ax^2 + ax \not\equiv 0$ при $a \neq 0$ маємо $(f,f) = 0$.

Отже, остання умова не виконується і дана формула скалярного добутку не визначає. $\square$

Приклад 67. *Довести, що в лінійному просторі неперервних на відрізку $[a;b]$ функцій зі звичайними операціями додавання та множення на число скалярний добуток може бути заданий формулою* $(f,g) = \int\limits_a^b f(t)\,g(t)\,dt$.

Розв'язування. Перевіримо умови скалярного добутку у дійсному лінійному просторі:

1) $(f,g) = \int\limits_a^b f(t)\,g(t)\,dt(f,g) = \int\limits_a^b f(t)\,g(t)\,dt = \int\limits_a^b g(t)\,f(t)\,dt = (g,f)$, отже, симетричність має місце.
2) $(\alpha f + \beta g, q) = \int\limits_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))q(t)\,dt =$
$= \alpha \int\limits_a^b f(t)\,q(t)\,dt + \beta \int\limits_a^b g(t)\,q(t)\,dt = \alpha\,(f,q) + \beta\,(g,q)$, отже, має місце лінійність.
3) $(f,f) = \int\limits_a^b f(t)\,f(t)\,dt = \int\limits_a^b (f(t))^2 dt \geq 0$, причому рівність $\int\limits_a^b f^2(t)dt = 0$ виконується лише при $f(t) \equiv 0$.

Таким чином, у лінійному просторі неперервних на відрізку $[a;b]$ функцій зі звичайними операціями додавання та множення на число формула $(f,g) = \int\limits_a^b f(t)\,g(t)\,dt$ задає скалярний добуток. $\square$

Приклад 68. *Знайти норму вектора $\overrightarrow{x}$ евклідового простору із заданим скалярним добутком.*

1) $\overrightarrow{x} = (1;-2;3;4)$, $\quad (\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$.
2) $\overrightarrow{x} = (1;-1;2)$,
$(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.
3) $\overrightarrow{x} = (1+i;1-i)$, $\quad (\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2}$.

Розв'язування. За означенням $\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x})}$.

1) $\overrightarrow{x} = (1;-2;3;4)$, $\quad (\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$,
$(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x}) = 1+4+9+16 = 30$, $\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{30}$.
2) $\overrightarrow{x} = (1;-1;2)$,
$(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.
$(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x}) = 4-2-2+2+2+2+12 = 18$, $\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{18}$.
3) $\overrightarrow{x} = (1+i;1-i)$, $\quad (\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2}$.
$(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x}) = (1+i)(1-i) - i(1+i)(1-i) + i(1-i)(1-i) + 2i(1-i)(1+i) = 10$,
$\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{10}$.

$\square$

Приклад 69. *Знайти кут між векторами $\overrightarrow{x} = (1;0;0)$ та $\overrightarrow{y} = (0;1;0)$ в просторі R^3 із скалярним добутком*

$$(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3.$$

Розв'язування. За означенням $\cos\varphi = \dfrac{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})}{\|\overrightarrow{x}\|\|\overrightarrow{y}\|}$. Знайдемо скалярні добутки векторів: $(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = 2$, $\quad (\overrightarrow{x},\overrightarrow{x}) = 4$, $\quad (\overrightarrow{y},\overrightarrow{y}) = 2$. Тоді $\cos\varphi = \dfrac{2}{2\sqrt{2}}$ і $\varphi = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4}$. $\square$

Приклад 70. *В евклідовому просторі* $C[-\pi;\pi]$ *зі скалярним добутком* $\left(\overrightarrow{f},\overrightarrow{g}\right)=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(t\right)g\left(t\right)dt$ *знайти:*

1) *норму вектора* $\cos x+\sin x$,
2) *норму вектора* $f(x)=x$,
3) *скалярний добуток векторів* $\sin 2x,\ \ \sin 3x$,
4) *кут між векторами* $\cos x,\ \ \sin x$.

Розв'язування. 1) $\left(\overrightarrow{f},\overrightarrow{f}\right)=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(t\right)f\left(t\right)dt=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\cos x+\sin x\right)^2dx=$

$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1+2\cos x\sin x)dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1+\sin 2x)dx=\left(x-\tfrac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=$$

$=2\pi-\frac{1}{2}\cdot 0=2\pi$. Отже, $\|\overrightarrow{f}\|=\sqrt{2\pi}$.

2) $\left(\overrightarrow{f},\overrightarrow{f}\right)=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(t\right)f\left(t\right)dt=\int\limits_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\left(\dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\dfrac{2\pi^3}{3}$.

Таким чином, $\|\overrightarrow{f}\|=\sqrt{\dfrac{2\pi^3}{3}}$.

3) $\left(\overrightarrow{f},\overrightarrow{g}\right)=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(t\right)g\left(t\right)dt=\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\sin 2x\cos 3x)dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\sin 5x-\sin x)dx=$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x+\cos x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0.$$

4) $\left(\overrightarrow{f},\overrightarrow{g}\right)=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(t\right)g\left(t\right)dt=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos x dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin 2x dx=$

$=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0$. Отже, $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

□

Приклад 71. *Доповнити систему векторів* $\overrightarrow{g_1}=(1,1,1,2)$, $\overrightarrow{g_2}=(1,0,1,-1)$ *до ортогонального базису евклідового простору* E^4.

Розв'язування. Вектори $\overrightarrow{g_1},\overrightarrow{g_2}$ ортогональні: $(\overrightarrow{g_1},\overrightarrow{g_2})=0$. Знайдемо спочатку ортогональне доповнення системи $\overrightarrow{g_1},\overrightarrow{g_2}$. Якщо вектор $\overrightarrow{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ ортогональний до векторів $\overrightarrow{g_1}$ і $\overrightarrow{g_2}$, то $(g_1,x)=0$ і $(\overrightarrow{g_2},\overrightarrow{x})=0$. Це дає систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4=0\\ x_1+x_3-x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_1=x_4-x_3\\ x_2=-3x_4\end{cases}$.

Розглянемо фундаментальну систему розв'язків цієї системи лінійних рівнянь: $\overrightarrow{a_1} = (1, -3, 0, 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (-1, 0, 1, 0)$. Ортогоналізуємо систему $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$:

$$\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{a_1}, \quad \overrightarrow{b_2} = \overrightarrow{a_2} + \alpha \overrightarrow{b_1},$$

де α знаходимо з умови $\left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\right) = 0$. Маємо

$$0 = \left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\right) = \left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{a_2} + \alpha \overrightarrow{b_1}\right) = \left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{a_2}\right) + \alpha \left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_1}\right) = -1 + 11\alpha = 0.$$

Отже, $\alpha = \frac{1}{11}$ і $\overrightarrow{b_2} = (-1, 0, 1, 0) + \frac{1}{11}(1, -3, 0, 1) = \frac{1}{11}(-10, -3, 11, 1)$. Система $\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}$ буде шуканим ортогональним базисом. □

Приклад 72. *З'ясувати, чи визначає дана білінійна форма скалярний добуток у просторі R^2:*

1) $3x_1y_1 + 5x_1y_2 + x_2y_2$.
2) $2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$.

Розв'язування. Потрібно перевірити лише симетричність та додатну визначеність даної білінійної форми.

1) Матриця $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ форми не симетрична, тому і форма не є симетричною. Тобто,

$$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 3x_1y_1 + 5x_1y_2 + x_2y_2 \neq (\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x}) = 3y_1x_1 + 5y_1x_2 + y_2x_2.$$

Отже, дана білінійна форма скалярний добуток не визначає.

2) $2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$. Матриця $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ форми симетрична. Крім того $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 3x_1x_1 + x_1x_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 = 2{x_1}^2 + 2x_1x_2 + 3{x_2}^2 = = 2x_1 + \frac{1}{2}{x_2}^2 + \frac{5}{2}x_2^2 \geq 0$. Зокрема, $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0$ тільки коли $\overrightarrow{x} = 0$. Отже, дана білінійна форма визначає скалярний добуток.

□

Приклад 73. *З'ясувати, чи визначає дане правило*

$$\varphi(\alpha_1 + i\beta_1,\ \alpha_2 + i\beta_2) = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + i(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$$

скалярний добуток в одновимірному лінійному комплексному просторі $\mathbb{C}$:

Розв'язування. Перевіримо умови скалярного добутку.

$$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + i(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1),$$

$$(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x}) = (\alpha_2\alpha_1 - \beta_2\beta_1) + i(\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2),$$

$$\overline{(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})} = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) - i(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1).$$

Отже, $\overline{(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})} \neq (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$. Дане правило скалярний добуток не визначає.

$\square$

Приклад 74. *В одновимірному лінійному комплексному простору $\mathbb{C}$ скалярний добуток векторів $\overrightarrow{x} = \alpha_1 + i\beta_1$, $\overrightarrow{y} = \alpha_2 + i\beta_2$, задається правилом*

$$(\alpha_1 + i\beta_1,\ \alpha_2 + i\beta_2) = (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + i(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2).$$

Знайти

1) *довжину вектора $2 + 3i$;*
2) *довжину вектора $\alpha - i\beta$;*
3) *скалярний добуток векторів $\overrightarrow{x} = 2 + 3i$ та $\overrightarrow{y} = 4 - 5i$.*

Розв'язування. За означенням довжина вектора $\overrightarrow{x}$ є число $|\overrightarrow{x}| = \sqrt{(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})}$.

1) Довжина вектора $2+3i$ дорівнює $\sqrt{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$.
2) Довжина вектора $|\alpha - i\beta|$ дорівнює $\sqrt{(\alpha - i\beta)(\alpha + i\beta)} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.
3) $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = (2 + 3i)(4 + 5i) = (8 - 15) + i(10 + 12) = -7 + 22i$.

$\square$

Приклад 75. *У тривимірному унітарному просторі скалярний добуток векторів $\overrightarrow{x} = (x_1; x_2; x_3)$ та $\overrightarrow{y} = (y_1; y_2; y_3)$ визначається правилом:*

$$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3}.$$

З'ясувати, чи ортогональні наступні пари векторів:

1) $\overrightarrow{x} = (i; 0; 0)$ *та* $\overrightarrow{y} = (0; 2 - i; 3)$;
2) $\overrightarrow{x} = (-1; 4 + i; 5 + 2i)$ *та* $\overrightarrow{y} = (-i; 3; 3i)$.

Розв'язування. За означенням вектори ортогональні, якщо $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 0$.

1) $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 0 + 0 + 0 = 0$, вектори ортогональні.

2) $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = -1 \cdot i + (4+i) \cdot 3 + (5+2i)(-3i) = 18 - 13i \neq 0$. отже, вектори не є ортогональними.

$\square$

Приклад 76. *В унітарному просторі вектори* $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ $\overrightarrow{e_3}$, *утворюють ортогональний базис, причому* $|\overrightarrow{e_1}| = 1$, $|\overrightarrow{e_2}| = 2$, $|\overrightarrow{e_3}| = 3$. *Знайти* $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ *та* $|\overrightarrow{x}|$, $|\overrightarrow{y}|$, *якщо* $\overrightarrow{x} = i\overrightarrow{e_1} - (2+i)\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{y} = (i-4)\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - 3\overrightarrow{e_3}$.

Розв'язування. За умовою вектори $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ $\overrightarrow{e_3}$ ортогональні, тобто
$(\overrightarrow{e_j}, \overrightarrow{e_k}) = 0$ при $j \neq k$.
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = i \cdot (-i-4) \cdot 1^2 - (2-i) \cdot 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot (-3) \cdot 3^2 = -34 - 8i$.
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = i \cdot (-i) \cdot 1^2 - (2+i) \cdot (2-i) \cdot 2^2 + 1 \cdot 1 \cdot 3^2 = 1 + 20 + 9 = 30$, $|\overrightarrow{x}| = \sqrt{30}$.
$(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{y}) = (i-4) \cdot (-i-4) \cdot 1^2 - 1 \cdot 1 \cdot 2^2 + (-3) \cdot (-3) \cdot 3^2 = 17 + 4 + 81 = 102$, $|\overrightarrow{y}| = \sqrt{102}$.

$\square$

Приклад 77. *Обчислити матрицю Грама для системи векторів* $\overrightarrow{f_i}$, *якщо скалярний добуток* $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ *задано таким правилом:*

1) $\overrightarrow{f_1} = (1;2)$, $\overrightarrow{f_2} = (2;1)$, $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$.
2) $\overrightarrow{f_1} = (1;-1)$, $\overrightarrow{f_2} = (1;1)$, $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$.

Розв'язування. За означенням матриця Грама Γ для системи векторів $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}$ — це матриця, елементами якої є скалярні добутки векторів:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_1}\right) & \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}\right) \\ \left(\overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_1}\right) & \left(\overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_2}\right) \end{pmatrix}.$$

1) Маємо $\overrightarrow{f_1} = (1;2)$, $\overrightarrow{f_2} = (2;1)$, $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$.
$\left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_1}\right) = 1 + 4 = 5$, $\left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}\right) = 2 + 2 = 4$, $\left(\overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_2}\right) = 4 + 1 = 5$.
Тому $\Gamma = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

2) $\overrightarrow{f_1} = (1; -1), \quad \overrightarrow{f_2} = (1; 1), \quad (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2.$
$\left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_1}\right) = 1 + -1 - 13 = 2, \ \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}\right) = 1 + 1 - 1 - 3 = -2,$
$\left(\overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_2}\right) = 1 + 1 + 1 + 3 = 6.$ Тому $\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

□

Приклад 78. *Нехай $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ – ортонормований базис, $\overrightarrow{g_1} = -\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{g_2} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ і оператор $f : E^2 \to E^2$ має в базисі $\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}$ матрицю $A_g = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Знайти у базисі $\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}$ матрицю A^* спряженого оператора f^*.*

Розв'язування. Запишемо матрицю Грама $\Gamma = \begin{pmatrix} (\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_1}) & (\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}) \\ (\overrightarrow{g_2}, \overrightarrow{g_1}) & (\overrightarrow{g_2}, \overrightarrow{g_2}) \end{pmatrix}$ для системи векторів $\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}$: $\Gamma = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$. Оскільки $\Gamma^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ і $A^* = \Gamma^{-1}A^T\Gamma$, то маємо:

$$A^* = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 8 \\ -10 & 9 \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 79. *Перевірити на лінійну залежність дану систему векторів: $\overrightarrow{e_1} = (1, 2, 2, 0)$, $\overrightarrow{e_2} = (-1, 0, 2, 0)$, $\overrightarrow{e_3} = (2, 2, 0, 0)$.*

Розв'язування. Визначник Грама дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли вектори лінійно залежні. Запишемо матрицю Грама:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) & (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) & (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) \\ (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1}) & (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) & (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \\ (\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}) & (\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_2}) & (\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & -2 \\ 6 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\det \Gamma = 0$, то система лінійно залежна. □

Приклад 80. *Знайти об'єм тетраедра, побудованого на векторах* $\overrightarrow{a} = \{3;1;2;0\}$, $\overrightarrow{b} = \{2;7;4;1\}$, $\overrightarrow{c} = \{1;2;1;-1\}$.

Розв'язування. $V_{\text{тетраедра}} = \dfrac{1}{6}\sqrt{\det \Gamma}$.

Знайдемо визначник матриці Грама $\Gamma = \begin{pmatrix} (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) & \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) & (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) \\ \left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right) & \left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}\right) & \left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) \\ (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}) & \left(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}\right) & (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{c}) \end{pmatrix}$.

$$\det \Gamma = \begin{vmatrix} 14 & 21 & 7 \\ 21 & 70 & 19 \\ 7 & 19 & 7 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 2 & 21 & 7 \\ 3 & 70 & 19 \\ 1 & 19 & 7 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 0 & -17 & -7 \\ 0 & 13 & -2 \\ 1 & 19 & 7 \end{vmatrix} = 875.$$

$V = \dfrac{1}{6}\sqrt{875} = \dfrac{5\sqrt{35}}{6}$. □

Приклад 81. *Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах* $\overrightarrow{a} = \{2;3;1\}$, $\overrightarrow{b} = \{5;6;4\}$.

Розв'язування. $S_{\text{паралелограма}} = \sqrt{\det \Gamma}$.

Знайдемо визначник матриці Грама $\Gamma = \begin{pmatrix} (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) & \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) \\ \left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right) & \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) \end{pmatrix}$.

$\det \Gamma = \begin{vmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{vmatrix} = 54$. Отже, $S_{\text{паралелограма}} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$. □

Приклад 82. *Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах* $\overrightarrow{a} = \{3;1;0;1\}$, $\overrightarrow{b} = \{5;-4;1;0\}$, $\overrightarrow{c} = \{-2;0;3;-1\}$.

Розв'язування. $V_{\text{паралелепіпеда}} = \sqrt{\det \Gamma}$. Знайдемо визначник матриці Грама

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) & \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) & (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) \\ \left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right) & \left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}\right) & \left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) \\ (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}) & \left(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}\right) & (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{c}) \end{pmatrix}.$$

$$\det \Gamma = \begin{vmatrix} 11 & 11 & -7 \\ 11 & 42 & -7 \\ -7 & -7 & 14 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 11 & 11 & -1 \\ 11 & 42 & -1 \\ -7 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 11 & 11 & -1 \\ 0 & 31 & 0 \\ 15 & 15 & 0 \end{vmatrix} = 3255.$$

Отже, маємо $V_{\text{паралелепіпеда}} = \sqrt{3255}$. □

Приклад 83. *Знайти відстань між прямими*

$$l_1 : \begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 1 - t, \\ z = 2 + 2t. \end{cases} \quad \text{та } l_2 : \begin{cases} x = -t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 3t. \end{cases} .$$

Розв'язування. Нехай $\overrightarrow{r_{01}} = (3, 1, 2)$, $\overrightarrow{a_1} = \{1, -1, 2\}$, $\overrightarrow{r_{02}} = (0, 2, 0)$, $\overrightarrow{a_2} = \{-1, 3, 3\}$, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_{02}} - \overrightarrow{r_{01}} = \{-3, 1, -2\}$. Тоді відстань між прямими дорівнює $d = \dfrac{\sqrt{\det \Gamma\,(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})}}{\sqrt{\det \Gamma\,(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})}}$. Знайдемо визначники.

$$\det \Gamma\,(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}) = \begin{vmatrix} (\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}) & (\overrightarrow{r}, \overrightarrow{a_1}) & (\overrightarrow{r}, \overrightarrow{a_2}) \\ (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{r}) & (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_1}) & (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}) \\ (\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{r}) & (\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_1}) & (\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_2}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & -8 & 0 \\ -8 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 19 \end{vmatrix} = 324 = 18^2,$$

$$\det \Gamma\,(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}) = \begin{vmatrix} (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_1}) & (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}) \\ (\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_1}) & (\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_2}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 19 \end{vmatrix} = 110.$$

Отже, відстань між прямими дорівнює $d = \dfrac{18}{\sqrt{110}}$. □

Приклад 84. *Знайти відстань між прямими*

$$l_1 : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \text{та } l_2 : \begin{cases} x - 2y + 3z - 6 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases} .$$

Розв'язування. Пряма l_1 містить точку $r_1 = (0, 0, 1)$, а її напрямним вектором є вектор $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}]$, де $\overrightarrow{n_1} = \{1, 1, -1\}$, $\overrightarrow{n_2} = \{1, 1, 0\}$. Отже,

$$\overrightarrow{a} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, -1, 0)\,.$$

Пряма l_2 містить точку $r_2 = (-6, 0, 4)$, а її напрямним вектором є вектор $\overrightarrow{b1} = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}]$, де $\overrightarrow{n_1} = \{1, -2, 3\}$, $\overrightarrow{n_2} = \{2, -1, 3\}$.

Тоді $\overrightarrow{b}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-3\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}=(-3,3,3)$. Таким чином, відстань d між прямими дорівнює $d=\dfrac{\sqrt{\det\Gamma\left(r_2-r_1,\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{b_1}\right)}}{\sqrt{\det\Gamma\left(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{b_1}\right)}}$. Позначимо $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{r_2r_1}=(-6;0;3)$. Знайдемо визначники відповідних матриць Грама.

$$\det\Gamma\left(\overrightarrow{r},\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\right)=\begin{vmatrix} (\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}) & (\overrightarrow{r},\overrightarrow{a_1}) & \left(\overrightarrow{r},\overrightarrow{b_1}\right) \\ (\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{r}) & (\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a}_1) & \left(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{b_1}\right) \\ \left(\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{r}\right) & \left(\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{a_1}\right) & \left(\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_1}\right) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 45 & -6 & 27 \\ -6 & 2 & -6 \\ 27 & -6 & 27 \end{vmatrix}=$$

$$=324=18^2,$$

$$\det\Gamma\left(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\right)=\begin{vmatrix} (\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_1}) & \left(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{b_1}\right) \\ \left(\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{a_1}\right) & \left(\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_1}\right) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 27 \end{vmatrix}=18.$$

$$d=\frac{18}{\sqrt{18}}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}.$$

Отже, відстань між прямими дорівнює $d=3\sqrt{2}$. □

Зауважимо, що при $d=0$ прямі перетинаються.

Приклад 85. *Знайти координати вектора $\overrightarrow{x}$ у базисі $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_3}$, якщо $\overrightarrow{e_1}=\{1,1,1\}$, $\overrightarrow{e_2}=\{0,0,1\}$, $\overrightarrow{e_3}=\{2,-1,1\}$, $\overrightarrow{x}=\{1,2,1\}$.*

Розв'язування. Знайдемо скалярні добутки.

$(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_1})=3$, $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})=1$, $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_3})=2$, $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{x})=4$, $(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_2})=1$, $(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})=1$, $(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{x})=1$, $(\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_3})=6$, $(\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{x})=1$.

Тоді

$$\begin{vmatrix} a & b & c & x \\ (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_1}) & (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}) & (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_3}) & (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{x}) \\ (\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_1}) & (\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_2}) & (\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}) & (\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{x}) \\ (\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_1}) & (\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_2}) & (\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_3}) & (\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{x}) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c & x \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$= a\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 15a - 3b - 3c - 9x = 0, \quad x = \frac{5}{3}a - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c.$$

Відповідь: $\overrightarrow{x} = \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. □

Приклад 86. *Знайти ранг квадратичної форми* $L(x_1, x_2, x_3)$, *якщо*

1) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.
2) $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_2x_3$.

Розв'язування. Ранг квадратичної форми дорівнює рангу її матриці. Для обчислення рангу елементарними перетвореннями приводимо матрицю квадратичної форми до трапецієвідного вигляду.

1) Матриця квадратичної форми має вигляд $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[I(-3)+III \to III]{I(-2)+II \to II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & -5 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{-II+III \to II}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{5II+III \to III} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 47 \end{pmatrix}.$$

Маємо три лінійно незалежні рядки. Ранг матриці, відповідно й ранг квадратичної форми, дорівнює 3.

2) Матриця квадратичної форми має вигляд $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -4 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-III \to II}$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+II \to II} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[III(-2)+I \to II]{III \to I}$$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}$. Маємо два лінійно незалежних рядки. Отже, ранг квадратичної форми дорівнює 2.

$\square$

Приклад 87. *Дослідити квадратичну форму*

$$L(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3$$

на знакосталість.

Розв'язування. Матриця квадратичної форми дорівнює $A = \begin{pmatrix} \boxed{6} & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Знайдемо головні мінори цієї матриці:

$$\Delta_1 = 6 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 17 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 71 > 0.$$

За критерієм Сильвестра квадратична форма є додатно визначеною. $\square$

Приклад 88. *Дослідити квадратичну форму*

$$L(x_1, x_2, x_3) = -8x_1^2 - 5x_2^2 - 6x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

на знакосталість.

Розв'язування. Головні мінори матриці $A = \begin{pmatrix} \boxed{-8} & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$ квадратичної форми L дорівнюють:

$$\Delta_1 = -8 < 0, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 36 > 0, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} -8 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -6 \end{vmatrix} = -207 < 0.$$

За критерієм Сильвестра квадратична форма є від'ємно визначеною. $\square$

Приклад 89. *Для яких* λ *квадратична форма* $L(x_1, x_2) = \lambda x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2$ *є знакосталою.*

Розв'язування. Головні мінори матриці $A = \begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ квадратичної форми L залежать від λ: $\Delta_1 = \lambda$, $\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3\lambda - 4$. Треба розв'язати дві системи рівнянь: $\begin{cases} \Delta_1 > 0, \\ \Delta_2 > 0 \end{cases}$ (додатно визначена) та $\begin{cases} \Delta_1 < 0, \\ \Delta_2 > 0 \end{cases}$ (від'ємно визначена). Розв'язками першої системи $\begin{cases} \lambda > 0, \\ 3\lambda - 4 > 0 \end{cases}$ будуть $\lambda > \dfrac{4}{3}$, а друга система $\begin{cases} \lambda < 0, \\ 3\lambda - 4 > 0 \end{cases}$ розв'язків не має. Отже, квадратична форма додатно визначена при $\lambda > \dfrac{4}{3}$. □

Приклад 90. *Звести форму* $L(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_2x_3$ *до канонічного вигляду методом Лагранжа та методом Якобі. Для методу Лагранжа вказати відповідну заміну змінних.*

Розв'язування. 1) Метод Лагранжа полягає у послідовному виділенні повних квадратів. На кожному кроці збираємо всі члени, які містять фіксовану змінну. На першому кроці збираємо всі члени, які містять x_3, на другому - всі члени з x_2.

$$L(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_2x_3 = (x_3^2 - 2x_2x_3) + 2x_2^2 - x_1^2 + 6x_1x_2 =$$

$$= (x_3 - x_2)^2 + x_2^2 - x_1^2 + 6x_1x_2 = (x_3 - x_2)^2 + (x_2^2 + 6x_1x_2) - x_1^2 =$$

$$= (x_3 - x_2)^2 + (x_2 + 3x_1)^2 - 10x_1^2.$$

Введемо заміну: $y_1 = x_3 - x_2$, $\quad y_2 = (x_2 + 3x_1)$, $\quad y_3 = x_1$. Тоді квадратична форма набуває канонічного вигляду $L(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 - 10y_3^2$.

2) Метод Якобі можна застосовувати лише у випадку відмінних від нуля головних мінорів. Матриця квадратичної форми має вигляд:

$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Тому $\Delta_1 = -1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -11$,

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -10$. Всі головні мінори відміни від нуля, тому існує єдине невироджене однорідне перетворення змінних що приводить квадратичну форму до канонічного вигляду $\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k y_k^2$, де
$\beta_1 = \Delta_1$,
$\beta_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}$, $\beta_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$, $k = \overline{1,n}$.
Знайдемо β_k: $\beta_1 = \Delta_1 = -1$, $\beta_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} = 11$, $\beta_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta_2} = \dfrac{10}{11}$.
Канонічний вигляд: $L(y_1, y_2, y_3) = -y_1^2 + 11y_2^2 + \dfrac{10}{11}y_3^2$.

Зауваження. Зверніть увагу на те, що канонічний вигляд квадратичної форми не єдиний. Зберігається лише кількість додатних та від'ємних коефіцієнтів (теорема про інерцію квадратичної форми). □

Приклад 91. *Звести форму $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3$ до нормального вигляду методом Лагранжа.*

Розв'язування. Дана квадратична форма не містить квадратів, тому починаємо з допоміжної заміни змінних: $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$, $x_3 = y_3$. Тоді $L(y_1, y_2, y_3) = 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + 2(y_1 + y_2)y_3 = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_1y_3 + 2y_2y_3$. Далі вже можна виділяти повні квадрати:

$$L(y_1, y_2, y_3) = 2\left(y_1 + \frac{1}{2}y_3\right)^2 - \frac{1}{2}y_3^2 - 2\left(y_2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}y_3^2,$$

$$L(x_1, x_2, x_3) = 2\left(y_1 + \frac{1}{2}y_3\right)^2 - 2\left(y_2 - \frac{1}{2}\right).$$

Після заміни: $z_1 = \left(y_1 + \dfrac{1}{2}y_3\right)$, $z_2 = \left(y_2 - \dfrac{1}{2}y_3\right)$ одержуємо канонічний вигляд $L(z_1, z_2, z_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2$. Щоб одержати нормальний вигляд зробимо додаткову заміну змінних: $h_1 = \sqrt{2}z_1$, $h_2 = \sqrt{2}z_2$. Отже, нормальний вигляд квадратичної форми L буде $h_1^2 - h_2^2$. □

Приклад 92. *Методом ортогональних перетворень звести квадратичну форму* $L(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ *до головних осей. Вказати відповідне ортогональне перетворення.*

Розв'язування. Матриця даної квадратичної форми має вигляд
$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$ має корені: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 4$. Знайдемо для цих власних чисел нормовані власні вектори.

1) $\lambda_1 = -2$. Відповідний власний вектор буде розв'язком системи лінійних рівнянь $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$, або $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ Ця система рівносильна системі рівнянь: $\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$
Нехай $x_2 = 1$, тоді $x_3 = -2$, $\quad x_1 = 5 - 4 = 1$. Власний вектор має вигляд: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Після нормування отримаємо: $\overrightarrow{e_1^*} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2) $\lambda_2 = 4$. У цьому випадку маємо систему $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$,
або $\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$ яка рівносильна одному рівнянню $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$. Знаходимо ФСР (фундаментальну систему розв'язків)

цієї системи: вектори $\overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Застосовуючи до цих векторів процес ортогоналізації, одержуємо: $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{a_3} - \frac{(\overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{e_2})}{(\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_2})}\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Після нормування одержимо: $\overrightarrow{e_2^*} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e_3^*} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Вектори $\overrightarrow{e_1^*}$, $\overrightarrow{e_2^*}$, $\overrightarrow{e_3^*}$ утворюють ортонормований базис, в якому квадратична форма набуває вигляду $-2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2$.

Матриця переходу до базису $\overrightarrow{e_1^*}$, $\overrightarrow{e_2^*}$, $\overrightarrow{e_3^*}$, тобто матриця відповідного ортогонального перетворення має вигляд: $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$,

а саме ортогональне перетворення — вигляд $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{30}}y_3, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + 0y_2 + \frac{5}{\sqrt{30}}y_3, \\ x_3 = -\frac{2}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{2}{\sqrt{30}}y_3. \end{cases}$

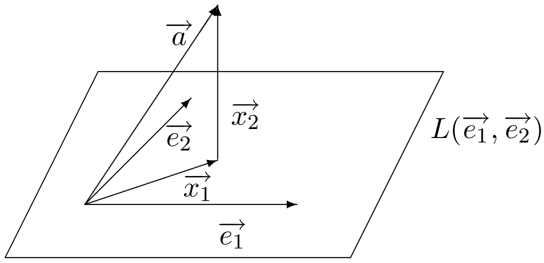
□

Приклад 93. *Нехай R^4 – арифметичний векторний простір із скалярним добутком $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$ для $\overrightarrow{x} = (x_1; x_2; x_3; x_4)$, $\overrightarrow{y} = (y_1; y_2; y_3; y_4)$. Знайти ортогональну проекцію вектора $\overrightarrow{a}$ на лінійну оболонку $L(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ векторів $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ та ортогональну складову.*

1) $\overrightarrow{a} = (2; 1; 0; -1)$, $\overrightarrow{e_1} = (3; 1; 2; 4)$, $\overrightarrow{e_2} = (4; -4; 0; -2)$;

2) $\overrightarrow{a}=(2;3;1;-1)$, $\overrightarrow{e_1}=(1;2;-1;3)$, $\overrightarrow{e_2}=(0;3;-4;0)$.

Розв'язування. 1) Позначимо через $\overrightarrow{x_1}$ ортогональну проекцію вектора $\overrightarrow{a}$ на лінійну оболонку $L(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, через $\overrightarrow{x_2}$– ортогональну складову. Тоді $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_2}$.



Легко перевіряється, що $\overrightarrow{e_1}$ і $\overrightarrow{e_2}$ ортогональні. У цьому випадку ортогональна проекція вектора $\overrightarrow{a}$ дорівнює $\overrightarrow{x_1}=\dfrac{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{a})}{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_1})}\overrightarrow{e_1}+\dfrac{(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{a})}{(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_2})}\overrightarrow{e_2}$. Знайдемо необхідні скалярні добутки векторів:

$(\overrightarrow{a},\overrightarrow{e_1})=6+1+0-4=3;\quad (\overrightarrow{a},\overrightarrow{e_2})=8-4+0+2=6;$

$(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_1})=9+1+1+16=30;\quad (\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_2})=14+14+0+4=36.$

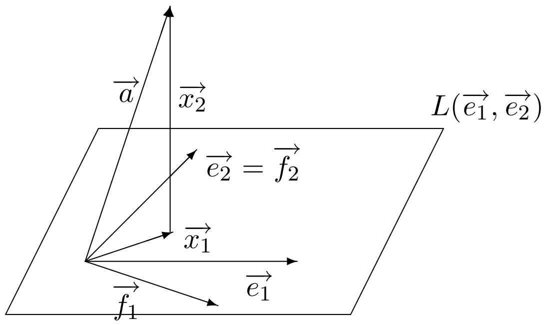
Підставляючи отримані результати отримаємо:

$\overrightarrow{x_1}=\frac{3}{30}(3;1;2;4)+\frac{6}{36}(4;-4;0;-2)=\frac{1}{30}(29;-17;6;2).$

Тепер знаходимо ортогональну складову:

$\overrightarrow{x_2}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{x_1}=(2;1;0;-1)-\frac{1}{30}(29;-17;6;2)=\frac{1}{30}(31;47;-6;-32).$

2) Знову, нехай $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_2}$, де $\overrightarrow{x_1}$ — ортогональна проекція вектора $\overrightarrow{a}$ на лінійну оболонку $L(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, а $\overrightarrow{x_2}$ — ортогональна складова.



Оскільки $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})=0+6+4+0=10\neq 0$, то вектори не ортогональні. Ортогоналізуємо вектори $\overrightarrow{e_1}$ та $\overrightarrow{e_2}$ за методом Грама-Шмідта. Нехай $\overrightarrow{f_2}=\overrightarrow{e_2}=(0;3;-4;0)$. Тоді $\overrightarrow{f_1}=\overrightarrow{e_1}-\dfrac{\left(\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{e_1}\right)}{\left(\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{f_2}\right)}\cdot\overrightarrow{f_2}$.

Оскільки $\left(\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{e_1}\right)=0+6+4+0=10$, $\left(\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{f_2}\right)=0+9+16+0=25$, то

$$\overrightarrow{f_1}=\overrightarrow{e_1}-\frac{\left(\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{e_1}\right)}{\left(\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{f_2}\right)}\cdot\overrightarrow{f_2}=(1;2;-1;3)-\frac{10}{25}(0;3;-4;0)=\frac{1}{5}(5;4;3;15).$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2}$ ортогональні і $L\left(\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2}\right)=L\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$, то далі ортогональну проекцію $\overrightarrow{x_1}$ вектора $\overrightarrow{a}$ шукаємо так само, як у попередній задачі:

$$\overrightarrow{x_1}=\frac{\left(\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{a}\right)}{\left(\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_1}\right)}\overrightarrow{f_1}+\frac{\left(\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{a}\right)}{\left(\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{f_2}\right)}\overrightarrow{f_2}.$$

Знайдемо необхідні скалярні добутки векторів:
$\left(\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{a}\right)=\frac{1}{5}(10+12+3-15)=2;\quad\left(\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{a}\right)=0+9-4+0=5;$
$\left(\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_1}\right)=\frac{1}{25}(25+16+9+225)=11;\ \left(\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{f_2}\right)=0+9+16+0=25.$
Отже, $\overrightarrow{x_1}=\frac{2}{55}(5;4;3;15)+\frac{1}{5}(0;3;-4;0)=\frac{1}{55}(10;41;-38;30).$
Тепер нескладно знайти ортогональну складову $\overrightarrow{x_2}$ вектора $\overrightarrow{a}$ на лінійну оболонку $L\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$:
$\overrightarrow{x_2}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{x_1}=(2;3;1;-1)-\frac{1}{55}(10;41;-38;30)=\frac{1}{55}(100;124;93;-85).$

□

Приклад 94. *Самоспряжений оператор має в деякому ортонормованому базисі матрицю* $A=\begin{pmatrix}3&-3&-3\\-3&3&-3\\-3&-3&3\end{pmatrix}$. *Знайти власні числа та ортонормований власний базис.*

Розв'язування. 1) Складаємо характеристичне рівняння:

$$\det(A-\lambda E)=0\quad\Leftrightarrow\begin{vmatrix}3-\lambda&-3&-3\\-3&3-\lambda&-3\\-3&-3&3-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Розкриваючи визначник за першим рядком, отримуємо:
$(3-\lambda)((3-\lambda)^2-9)+3(-3(3-\lambda)-9)-3(9+3(3-\lambda))=$
$=-(\lambda-6)(\lambda^2-3\lambda-18)=0.$
Коренями цього рівняння є $\lambda_1=6,\ \lambda_2=6,\ \lambda_3=-3.$

2) Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda = 6$. Для цього розв'яжемо систему $(A-6E)x = 0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right)$.

ФСР цієї системи дасть нам два лінійно незалежні вектори з власним числом $\lambda = 6$. Знайдемо ФСР. Оскільки $\operatorname{rang}(A-6E) = 1$, $\operatorname{def}(A-6E) = 2$, то оператор буде мати два власних вектора, що відповідають цьому власному числу. Відновлюємо систему: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Нехай $x_1 = a$, $x_2 = b$, тоді $x_3 = -a-b$. Отже, загальний розв'язок системи $\begin{pmatrix} a \\ b \\ -a-b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$. При $a = 1, b = 0$ отримаємо $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ — це перший власний вектор. При $a = 0, b = 1$ маємо $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ — другий власний вектор.

3) Вектори f_1, f_2 не є ортогональними. Ортогоналізуємо їх за методом Грама–Шмідта. Нехай $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{f_2} = (0;1;-1)$. Тоді $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{f_1} - \frac{\left(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{f_1}\right)}{\left(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}\right)} \cdot \overrightarrow{e_2}$. Оскільки $\left(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{f_1}\right) = 0 + 0 + 1 = 1$, $\left(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}\right) = 0 + 1 + 1 = 2$, то $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{f_1} - \frac{\left(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{f_1}\right)}{\left(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}\right)} \cdot \overrightarrow{e_2} = (1;0;-1) - \frac{1}{2}(0;1;-1) = \frac{1}{2}(2;-1;-1)$. Вектори $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ ортогональні.

4) Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda = -3$. Для цього розв'яжемо систему $(A+3E)x = 0$:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
Оскільки $\operatorname{rang}(A+3E) = 2$, $\operatorname{def}(A+3E) = 1$, то оператор буде мати один власний вектор, що відповідає цьому власному числу. Відновлюємо систему:

$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$ Нехай $x_1 = a$, тоді $x_2 = a$, $x_3 = a$. Отже, загальний розв'язок системи $\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. При $a = 1$ маємо ФСР: $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ — третій власний вектор.

5) Пронормуємо власні вектори: $e_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $e_2^* = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $e_3^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

Відповідь: Власні числа $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -3$, відповідний власний ортонормований базис $e_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $e_2^* = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $e_3^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. $\square$

Приклад 95. *Нехай R^3 – евклідів простір із ортонормованим базисом $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$; $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$; $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$. Знайти в цьому базисі матрицю оператора ортогонального проектування на пряму* $L: \ \dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{-3}$.

Розв'язування. Спочатку знайдемо ортонормований базис простору R^3, в якому перший з базисних векторів є напрямним вектором прямої L. Шукаємо ортогональний базис, а потім його пронормуємо. За перший вектор базису візьмемо напрямний вектор прямої $\overrightarrow{e_1} = (0; 4; -3)$. Знайдемо вектор $\overrightarrow{e_2}$ ортогональний вектору $\overrightarrow{e_1}$, тобто $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = 0$. Наприклад, вектор $\overrightarrow{e_2} = (-1; 6; 8)$. Знайдемо вектор $\overrightarrow{e_3} = (x_1; x_2; x_3)$, ортогональний до векторів

$\overrightarrow{e_1}$ та $\overrightarrow{e_2}$, тобто одночасно $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) = 0$, $(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) = 0$. Цим умовам задовольняє вектор $\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}$. Маємо

$$\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 6 & 8 \end{vmatrix} = (50;\ 3;\ 4)\,.$$

Пронормуємо вектори $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$.

$$\|\overrightarrow{e_1}\| = 5, \|\overrightarrow{e_2}\| = \sqrt{101}, \|\overrightarrow{e_3}\| = \sqrt{2525} = 5\sqrt{101}.$$

Тоді $\overrightarrow{e_1^*} = \left(0; \frac{4}{5}; \frac{-3}{5}\right)$, $\overrightarrow{e_2^*} = \left(\frac{-1}{\sqrt{101}}; \frac{6}{\sqrt{101}}; \frac{8}{\sqrt{101}}\right)$, $\overrightarrow{e_3^*} = \left(\frac{50}{5\sqrt{101}}; \frac{3}{5\sqrt{101}}; \frac{4}{5\sqrt{101}}\right)$. Зрозуміло, що оператор ортогонального проектування на пряму L, переводить вектор $\overrightarrow{e_1^*}$ в себе, а вектори $\overrightarrow{e_2^*}$ та $\overrightarrow{e_3^*}$ в точку, тобто в нульовий вектор.

Отже, оператор проектування має в цьому базисі матрицю $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Залишається знайти, як зміниться ця матриця при переході до базису $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$. Матриця переходу від базису $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ до базису $\overrightarrow{e_1^*}, \overrightarrow{e_2^*}, \overrightarrow{e_3^*}$ має вигляд $C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{101}} & \frac{50}{5\sqrt{101}} \\ \frac{4}{5} & \frac{6}{\sqrt{101}} & \frac{3}{5\sqrt{101}} \\ \frac{-3}{5} & \frac{8}{\sqrt{101}} & \frac{4}{5\sqrt{101}} \end{pmatrix}$,

$$\det C = \frac{1}{5 \cdot \sqrt{101} \cdot 5\sqrt{101}} \left(-4\,(-404) - 3\,(-303)\right) = \frac{2525}{25 \cdot 101} = 1.$$

Враховуючи, що базис $\overrightarrow{e_1^*}, \overrightarrow{e_2^*}, \overrightarrow{e_3^*}$ ортонормований, отримаємо

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{\sqrt{101}} & \frac{6}{\sqrt{101}} & \frac{8}{\sqrt{101}} \\ \frac{50}{5\sqrt{101}} & \frac{3}{5\sqrt{101}} & \frac{4}{5\sqrt{101}} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, матриця оператора ортогонального проектування в базисі $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ має вигляд $A = CA_eC^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{101}} & \frac{50}{5\sqrt{101}} \\ \frac{4}{5} & \frac{6}{\sqrt{101}} & \frac{3}{5\sqrt{101}} \\ \frac{-3}{5} & \frac{8}{\sqrt{101}} & \frac{4}{5\sqrt{101}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{\sqrt{101}} & \frac{6}{\sqrt{101}} & \frac{8}{\sqrt{101}} \\ \frac{50}{5\sqrt{101}} & \frac{3}{5\sqrt{101}} & \frac{4}{5\sqrt{101}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ \frac{-3}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{\sqrt{101}} & \frac{6}{\sqrt{101}} & \frac{8}{\sqrt{101}} \\ \frac{50}{5\sqrt{101}} & \frac{3}{5\sqrt{101}} & \frac{4}{5\sqrt{101}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{25} & \frac{-12}{25} \\ 0 & \frac{-12}{25} & \frac{9}{25} \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 96. *Нехай R^3 – евклідів простір із ортонормованим базисом $\overrightarrow{i} = (1;0;0)$, $\overrightarrow{j} = (0;1;0)$, $\overrightarrow{k} = (0;0;1)$. Знайти в цьому базисі матрицю оператора ортогонального проектування на площину $\pi: \ x-3y+5z=0$.*

Розв'язування. Спочатку побудуємо такий ортонормований базис простору R^3, в якому два вектора базису лежать у площині. Відомо, що вектор $\overrightarrow{e_3} = (1;-3;5)$ ортогональний до площини π. Легко підібрати трійку чисел, що задовольняють рівняння площини. Наприклад, $(-2;1;1)$. Отже, вектор $\overrightarrow{e_1} = (-2;1;1)$ буде ортогональним вектору $\overrightarrow{e_3}$ бо $(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}) = 0$ і буде лежати в площині. Знайдемо вектор $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_3} = (8;11;5)$. Пронормуємо вектори базису $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$: $\|\overrightarrow{e_1}\| = \sqrt{6}$, $\|\overrightarrow{e_2}\| = \sqrt{210}$, $\|\overrightarrow{e_3}\| = \sqrt{35}$.

Тоді $\overrightarrow{e_1^*} = \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\overrightarrow{e_2^*} = \left(\frac{8}{\sqrt{210}}; \frac{11}{\sqrt{210}}; \frac{5}{\sqrt{210}}\right)$, $\overrightarrow{e_3^*} = \left(\frac{1}{\sqrt{35}}; \frac{-3}{\sqrt{35}}; \frac{5}{\sqrt{35}}\right)$. Оператор ортогонального проектування на площину проектує вектори $\overrightarrow{e_1}$ та $\overrightarrow{e_2}$ в себе, а вектор $\overrightarrow{e_3}$ в точку, тобто в нульовий вектор. Отже, матриця оператора проектування в цьому базисі дорівнює $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Матриця переходу від базису $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ до базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ має вигляд $C = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{8}{\sqrt{210}} & \frac{1}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{11}{\sqrt{210}} & \frac{-3}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{210}} & \frac{5}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}$, $\det C = -1$.

Враховуючи, що $\overrightarrow{e_1^*}, \overrightarrow{e_2^*}, \overrightarrow{e_3^*}$ ортонормовані, отримаємо

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{8}{\sqrt{210}} & \frac{11}{\sqrt{210}} & \frac{5}{\sqrt{210}} \\ \frac{1}{\sqrt{35}} & \frac{-3}{\sqrt{35}} & \frac{5}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}.$$

Таким чином матриця оператора ортогонального проектування на площину π в базисі $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ має вигляд $A = CA_eC^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{8}{\sqrt{210}} & \frac{1}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{11}{\sqrt{210}} & \frac{-3}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{210}} & \frac{5}{\sqrt{35}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{8}{\sqrt{210}} & \frac{11}{\sqrt{210}} & \frac{5}{\sqrt{210}} \\ \frac{1}{\sqrt{35}} & \frac{-3}{\sqrt{35}} & \frac{5}{\sqrt{35}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{34}{35} & \frac{3}{35} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{35} & \frac{26}{35} & \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 97. *Знайти спектральний розклад самоспряженого оператора* $A: E^2 \to E^2$, *який має в ортонормованому базисі матрицю* $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Спектральний (за власними числами) розклад оператора A має вигляд $A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$, де λ_k — власні числа, а оператори P_k – проектори на одновимірні підпростори, що породжуються власними векторами $\overrightarrow{e_k}$, причому $\overrightarrow{e_1}$ і $\overrightarrow{e_2}$ повинні утворювати ортонормовану систему.

Знайдемо власні числа оператора A.

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(3-\lambda) - 4 = 14 - 9\lambda + \lambda^2 = 0,$$

$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 7.$

Знайдемо власні вектори, що відповідають власним числам оператора.

$\lambda_1 = 2: \quad$ тоді з $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, отримаємо $2x_1 + x_2 = 0$.

Нехай $x_1 = 1$, тоді $x_2 = -2$ і відповідний власний вектор $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Після нормування отримуємо: $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

Тоді $P_1 x = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e_1})\,\overrightarrow{e_1} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}x_1 - \dfrac{2}{\sqrt{5}}x_2\right)\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \\ \dfrac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{5}x_1 - \dfrac{2}{5}x_2 \\ \\ \dfrac{-2}{5}x_1 + \dfrac{4}{5}x_2 \end{pmatrix}$.

Отже, проектор на пряму $\langle \overrightarrow{e_1} \rangle$ має матрицю $P_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{5} & \dfrac{-2}{5} \\ \\ \dfrac{-2}{5} & \dfrac{4}{5} \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 7$. Тоді з $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, отримаємо $-x_1 + 2x_2 = 0$.

Нехай $x_2 = 1$, тоді $x_1 = 2$ і відповідний власний вектор $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Після нормування отримуємо: $\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$. Тоді

$P_2 x = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e_2})\,\overrightarrow{e_2} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}x_2\right)\begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5}x_1 + \dfrac{2}{5}x_2 \\ \\ \dfrac{2}{5}x_1 + \dfrac{1}{5}x_2 \end{pmatrix}$. Отже, проектор на пряму $\langle \overrightarrow{e_2} \rangle$ має матрицю $P_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5} & \dfrac{2}{5} \\ \\ \dfrac{2}{5} & \dfrac{1}{5} \end{pmatrix}$.

Перевірка: $A = 2\begin{pmatrix} \dfrac{1}{5} & \dfrac{-2}{5} \\ \\ \dfrac{-2}{5} & \dfrac{4}{5} \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} \dfrac{4}{5} & \dfrac{2}{5} \\ \\ \dfrac{2}{5} & \dfrac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. □

Приклад 98. *Подати невироджений оператор* $A: \ E^2 \longrightarrow E^2$ *, заданий в деякому ортонормованому базисі матрицею* A*, у вигляді добутку ортогонального та додатновизначеного операторів:*

$$1) \ A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad 2) \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Нам потрібно знайти такі такі матрицю O ортогонального оператората матрицю S додатновизначеного оператора, щоб виконувалась рівність $A = O \cdot S$ (полярний розклад оператора).

1) Оскільки $\det A = 10$ та $\det S > 0$, то маємо, що $\det O = 1$. В цьому випадку ортогональну матрицю запишемо у вигляді $O = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$.

Нехай $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$. Тоді з $A = O \cdot S$ отримаємо $S = O^{-1} \cdot A$.

Підставляючи обернену матрицю $O^{-1} = \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$ в останню рівність, отримаємо

$$S = O^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 6\sin\alpha + 2\cos\alpha & 2\sin\alpha - \cos\alpha \\ 6\cos\alpha - 2\sin\alpha & 2\cos\alpha + \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

В силу симетричності матриці S отримаємо $s_{12} = s_{21}$, тобто

$$2\sin\alpha - \cos\alpha = 6\cos\alpha - 2\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad 4\sin\alpha = 7\cos\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{4} \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{7}{\sqrt{65}}, \ \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{65}}.$$

Тоді $O = \begin{pmatrix} \frac{7}{\sqrt{65}} & \frac{4}{\sqrt{65}} \\ -\frac{4}{\sqrt{65}} & \frac{7}{\sqrt{65}} \end{pmatrix}$ та $S = \begin{pmatrix} \frac{50}{\sqrt{65}} & \frac{10}{\sqrt{65}} \\ \frac{10}{\sqrt{65}} & \frac{15}{\sqrt{65}} \end{pmatrix}$.

Перевірка: $A = O \cdot S = \begin{pmatrix} \frac{7}{\sqrt{65}} & \frac{4}{\sqrt{65}} \\ -\frac{4}{\sqrt{65}} & \frac{7}{\sqrt{65}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{50}{\sqrt{65}} & \frac{10}{\sqrt{65}} \\ \frac{10}{\sqrt{65}} & \frac{15}{\sqrt{65}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Оскільки оператор S додатновизначений, тобто $\det S > 0$, а $\det A = -7$, то $\det O = -1$.

Отже, ортогональну матрицю запишемо у вигляді $O = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$. Тоді з $A = O{\cdot}S$ знаходимо $S = O^{-1}{\cdot}A$. Враховуючи, що $O^{-1} = -\begin{pmatrix} -\sin\alpha & -\cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$, отримаємо

$$S = O^{-1}\cdot A = -\begin{pmatrix} -\sin\alpha & -\cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} -\sin\alpha - 3\cos\alpha & -2\sin\alpha + \cos\alpha \\ -\cos\alpha + 3\sin\alpha & -2\cos\alpha - \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha + 3\cos\alpha & 2\sin\alpha - \cos\alpha \\ \cos\alpha - 3\sin\alpha & 2\cos\alpha + \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

$s_{12} = s_{21} \Rightarrow\ 2\sin\alpha - \cos\alpha = \cos\alpha - 3\sin\alpha\ \Rightarrow\ 5\sin\alpha = 2\cos\alpha$

$$\Rightarrow\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$\sin\alpha = \sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{5}\right)\right) = \frac{\frac{2}{5}}{\sqrt{1+\frac{4}{25}}} = \frac{2}{\sqrt{29}},$$

$$\cos\alpha = \cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{5}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{25}}} = \frac{5}{\sqrt{29}}.$$

$$s_{11} = \sin\alpha + 3\cos\alpha = \frac{17}{\sqrt{29}},$$

$$s_{12} = 2\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{29}},$$

$$s_{22} = 2\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{12}{\sqrt{29}}.$$

Тоді $O = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{29}} & \frac{5}{\sqrt{29}} \\ \frac{5}{\sqrt{29}} & \frac{-2}{\sqrt{29}} \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} \frac{17}{\sqrt{29}} & \frac{-1}{\sqrt{29}} \\ \frac{-1}{\sqrt{29}} & \frac{12}{\sqrt{29}} \end{pmatrix}$.

Перевірка: $A = O\cdot S = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{29}} & \frac{5}{\sqrt{29}} \\ \frac{5}{\sqrt{29}} & \frac{-2}{\sqrt{29}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{17}{\sqrt{29}} & \frac{-1}{\sqrt{29}} \\ \frac{-1}{\sqrt{29}} & \frac{12}{\sqrt{29}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Зауважимо, що коли оператор A вироджений, то розклад не єдиний - а саме: S визначається однозначно, але O може бути багато. Полярний розклад подає оператор A, як комбинацію стискання S та обертання O.

$\square$

Приклад 99. *Знайти найбільший спільний дільник многочленів*
$f(x) = 3x^6 - x^5 - 9x^4 - 14x^3 - 11x^2 - 3x - 1$ *та*
$g(x) = 3x^5 + 8x^4 + 9x^3 + 15x^2 + 10x + 9.$

Розв'язування. Для знаходження найбільшого спільного дільника зручно використовувати алгоритм Евкліда. Оскільки найбільший спільний дільник двох многочленів визначений лише з точністю до числового множника, то при знаходженні найбільшого спільного дільника остачу, частку і дільник можна на будь-якому кроці множити на довільне ненульове число (щоб уникнути дробових коефіцієнтів).

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} 3x^6 - x^5 - 9x^4 - 14x^3 - 11x^2 - 3x - 1 \\ \underline{3x^6 + 8x^5 + 9x^4 + 15x^3 + 10x^2 + 9x} \end{array} & \begin{array}{l} 3x^5 + 8x^4 + 9x^3 + 15x^2 + 10x + 9 \\ \hline x - 3 \end{array} \\
-\begin{array}{r} -9x^5 - 18x^4 - 29x^3 - 21x^2 - 12x - 1 \\ \underline{-9x^5 - 24x^4 - 27x^3 - 45x^2 - 30x - 27} \end{array} & \\
6x^4 - 2x^3 + 24x^2 + 18x + 26 \qquad (:2) &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} 3x^5 + 8x^4 + 9x^3 + 15x^2 + 10x + 9 \\ \underline{3x^5 - x^4 + 12x^3 + 9x^2 + 13x} \end{array} & \begin{array}{l} 3x^4 - x^3 + 12x^2 + 9x + 13 \\ \hline x + 3 \end{array} \\
-\begin{array}{r} 9x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 3x + 9 \\ \underline{9x^4 - 3x^3 + 36x^2 + 27x + 39} \end{array} & \\
-30x^2 - 30x - 30 \qquad (: -30) &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} 3x^4 - x^3 + 12x^2 + 9x + 13 \\ \underline{3x^4 + 3x^3 + 3x^2} \end{array} & \begin{array}{l} \boxed{x^2 + x + 1} = \text{НСД} \\ 3x^2 - 4x + 13 \end{array} \\
-\begin{array}{r} -4x^3 + 9x^2 + 3x + 13 \\ \underline{-4x^3 - 4x^2 - 4x} \end{array} & \\
-\begin{array}{r} 13x^2 + 13x + 13 \\ \underline{13x^2 + 13x + 13} \end{array} & \\
0 &
\end{array}
$$

Найбільший спільний дільник многочленів дорівнює останній ненульової остачі в алгоритмі Евкліда. Отже, $(f, g) = x^2 + x + 1$. $\square$

Приклад 100. *Знайти найбільший спільний дільник многочленів*
$f(x) = \left(x^3 + 1\right)\left(x^2 + 2x + 1\right)$ *і* $g(x) = \left(x^2 - 1\right)^2$.

Розв'язування. Найбільший спільний дільник можна знайти також за допомогою розкладу многочленів на незвідні множники. Знайдемо розклад наших многочленів на незвідні множники над полем дійсних чисел:

$$f(x) = \left(x^3+1\right)\left(x^2+2x+1\right) = (x+1)^3\left(x^2-x+1\right),$$

$$g(x) = \left(x^2-1\right)^2 = (x-1)^2\,(x+1)^2\,.$$

Тому найбільший спільний дільник дорівнює $(f,g) = (x+1)^2$.
Відповідь: $(f,g) = (x+1)^2$. $\square$

Приклад 101. *Обчислити значення многочлена* $f(x) = 2x^5 - 7x^3 + x - 3$ *у точці* $x_0 = -3$.

Розв'язування. Значення многочлена $f(x)$ у точці x_0 дорівнює остачі від ділення $f(x)$ на $(x - x_0)$. Тому для його обчислення зручно користуватися схемою Горнера.

	x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0
	2	0	-7	0	1	-3
$x_0 = -3$	$\downarrow$ 2	$-3 \cdot 2 + 0$	$-3 \cdot (-6) - 7$	$-3 \cdot 11 + 0$	$-3 \cdot (-33) + 1$	$-3 \cdot 100 - 3$
$x_0 = -3$	2	-6	11	-33	100	-303

Отже, значення многочлена $f(x) = 2x^5 - 7x^3 + x - 3$ в точці $x_0 = -3$ дорівнює -303.
Відповідь: $f(-3) = -303$. $\square$

Приклад 102. *Визначити кратність кореня* $x_0 = 2$ *для многочлена* $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$.

Розв'язування. Використаємо схему Горнера декілька разів, кожного разу змінюючи інформаційний рядок на останній заповнений.

	x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0
	1	-5	7	-2	4	-8
$x_0 = 2$	1	-3	1	0	4	$\boxed{0}$
2	1	-1	-1	-2	$\boxed{0}$	
2	1	1	1	$\boxed{0}$		
2	1	3	$\boxed{7 \neq 0}$			

Оскільки $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x-2)^3(x^2+x+1)$, то корінь $x = 2$ має кратність 3. □

Приклад 103. *Розкласти многочлен* $f(x) = 2x^5+x^4-x+3$ *за степенями* $x - 1$.

Розв'язування.

	x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0
	2	1	0	0	-1	3
$x_0 = 1$	2	3	3	3	2	$\boxed{5}$
1	2	5	8	11	$\boxed{13}$	
1	2	7	15	$\boxed{26}$		
1	2	9	$\boxed{24}$			
1	2	$\boxed{11}$				
1	$\boxed{2}$					

Розклад многочлена $f(x) = 2x^5 + x^4 - x + 3$ за степенями $x - 1$

$$f(x) = 2\,(x-1)^5 + 11\,(x-1)^4 + 24\,(x-1)^3 + 26\,(x-1)^2 + 13\,(x-1) + 5.$$

□

Приклад 104. *Знайти значення многочлена* $f(x) = -x^5 + 3x^3 - x^2 + 5$ *та значення усіх його похідних у точці* $x_0 = -1$.

Розв'язування.

	x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0
	-1	0	3	-1	0	5
$x_0 = -1$	-1	1	2	-3	3	$\boxed{2}$
-1	-1	2	0	-3	$\boxed{6}$	
-1	-1	3	-3	$\boxed{0}$		
-1	-1	4	$\boxed{-7}$			
-1	-1	$\boxed{5}$				
-1	$\boxed{-1}$					

Отримаємо:

$$f(x) = -\,(x-1)^5 + 5\,(x-1)^4 - 7\,(x-1)^3 + 6\,(x-1) + 2.$$

Порівнюючи розклад многочлена за степенями із розкладом за формулою Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + ... \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

отримуємо:

$$f(x_0) = 2, \quad f'(x_0) = 6 \cdot 1!, \quad f''(x_0) = 0 \cdot 2!,$$

$$f'''(x_0) = -7 \cdot 3!, \quad f^{(4)}(x_0) = 5 \cdot 4!, \quad f^{(5)}(x_0) = -1 \cdot 5!$$

$\square$

Схему Горнера можна також використовувати для знаходження розкладу дробу в суму елементарних дробів.

Приклад 105. *Розкласти дріб* $\dfrac{3x^5 + x^2 - 5x + 1}{(x+2)^6}$ *на найпростіші дроби над полем* $\mathbb{R}$.

Розв'язування. Знайдемо розклад многочлена $3x^5+x^2-5x+1$ за степенями $x + 2$:

	x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0
	3	0	0	1	-5	1
$x_0 = -2$	3	-6	12	-23	41	$\boxed{-81}$
-2	3	-12	36	-95	$\boxed{231}$	
-2	3	-18	72	$\boxed{-239}$		
-2	3	-24	$\boxed{144}$			
-2	3	$\boxed{-30}$				
-2	$\boxed{3}$					

Отримаємо:

$$\frac{3\,(x+2)^5 - 30\,(x+2)^4 + 144\,(x+2)^3 - 239\,(x+2)^2 + 231(x+2) - 81}{(x+2)^6} =$$

$$= \frac{3}{(x+2)} + \frac{-30}{(x+2)^2} + \frac{144}{(x+2)^3} + \frac{-239}{(x+2)^4} + \frac{231}{(x+2)^5} + \frac{-81}{(x+2)^6}.$$

$\square$

Приклад 106. *Розкласти дріб* $\dfrac{3x^3-11x^2-8x-24}{(x^2+1)(x-2)(x+1)}$ *на найпростіші дроби над полем* $\mathbb{R}$.

Розв'язування. Застосуємо метод невизначених коефіцієнтів.

$$\frac{3x^3-11x^2-8x-24}{(x^2+1)(x-2)(x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+1}=$$

$$=\frac{(Ax+B)(x-2)(x+1)+C(x^2+1)(x+1)+D(x^2+1)(x-2)}{(x^2+1)(x-2)(x+1)}.$$

Дроби рівні, отже, чисельники рівні:

$$3x^3-11x^2-8x-24=(Ax+B)(x-2)(x+1)+C(x^2+1)(x+1)+D(x^2+1)(x-2).$$

Задіємо спочатку дійсні корені знаменника.

$x=2 \;\Rightarrow\; 24-44-16-24=C\cdot 5\cdot 3 \;\Rightarrow\; -60=16C \;\Rightarrow\; C=-4.$

$x=-1 \;\Rightarrow\; -3-11+8-24=D\cdot 2\cdot(-3) \;\Rightarrow\; -30=-6D \;\Rightarrow\; D=5.$

Для знаходження A, B порівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$x^3 \mid 3=A+C+D \;\Rightarrow\; 3=A-4+5 \;\Rightarrow\; A=2.$

$x^0 \mid -24=-2B+C-2D \;\Rightarrow\; -24=-2B-4-10 \;\Rightarrow\; B=5.$

Отримаємо: $\dfrac{2x+5}{x^2+1}+\dfrac{-4}{(x-2)}+\dfrac{5}{x+1}.$ □

Приклад 107. *Розкласти многочлен* $f(x)$ *у добуток незвідних множників над полем* $\mathbb{R}$ *та полем* $\mathbb{C}$,

1) $f(x)=x^4-9x^2+64$; 2) $f(x)=x^6+8$.

Розв'язування. Над полем дійсних чисел незвідним може бути лише многочлен першого або другого степеня, над полем комплексних чисел незвідним може бути лише многочлен першого степеня.

1) $f(x)=x^4-9x^2+64=(x^2)^2+2\cdot 8\cdot x^2+64-2\cdot 8\cdot x^2-9x^2=$

$$=(x^2+8)^2-25x^2=(x^2+5x+8)(x^2-5x+8).$$

Оскільки дискримінанти множників від'ємні, то вони є незвідними над полем $\mathbb{R}$.

Над полем $\mathbb{C}$ множники x^2+5x+8 та x^2-5x+8 розкладаються далі:

$$f(x)=\left(x-\frac{-5+i\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-\frac{-5-i\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-\frac{5+i\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-\frac{5-i\sqrt{7}}{2}\right).$$

2) $f(x)=x^6+8=\left(x^2\right)^3+2^3=\left(x^2+2\right)\left(x^4-2x^2+4\right)=$
$=(x^2+2)\left((x^2+2)-6x^2\right)=(x^2+2)\left(x^2-\sqrt{6}x+2\right)\left(x^2+\sqrt{6}x+2\right).$
Оскільки дискримінанти множників від'ємні, то вони є незвідними над полем $\mathbb{R}$.

Над $\mathbb{C}$ множники $x^2+2,\ \ x^2-\sqrt{6}x+2,\ \ x^2+\sqrt{6}x+2$ розкладаються далі, тому над цим полем отримаємо:

$$f(x)=\left(x-i\sqrt{2}\right)\left(x+i\sqrt{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}\right)\times$$
$$\times\left(x-\frac{-\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{-\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}\right).$$

□

Приклад 108. *Знайти всі раціональні корені многочлена*

$$f(x)=12x^4-14x^3-7x-3.$$

Розв'язування. Для знаходження всіх раціональних коренів (якщо вони існують) многочлена $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ із цілими коефіцієнтами можна використати наступне твердження: кожний раціональний корінь многочлена $f(x)$ має вигляд $\dfrac{p}{q}$, де p – дільник числа a_n, q – дільник числа a_0, причому $p-mq$ ділить $f(m)\neq 0$. Зокрема, якщо $a_0=1$, то раціональний корінь є цілим числом.

Випишемо всі цілі дільники числа $a_n=3$: $\pm1;\pm3$. Натуральні дільники числа $a_0=12$ такі: $1;2;3;4;6;12$. Раціональні корені потрібно шукати серед чисел
$$\frac{p}{q}\in\left\{\frac{1}{1};\frac{-1}{1};\frac{3}{1};\frac{-3}{1};\frac{1}{2};\frac{-1}{2};\frac{3}{2};\frac{-3}{2};\frac{1}{3};\frac{-1}{3};\frac{1}{4};\frac{-1}{4};\frac{3}{4};\frac{-3}{4};\frac{1}{6};\frac{-1}{6};\frac{1}{12};\frac{-1}{12}\right\}.$$
Візьмемо перше число $x_0=1$: $f(1)=12-14-7-3=-12\neq 0$.

Покладемо $m=1$, тоді число $p-mq=p-q$ повинно ділити число -12:

Безпосередньо перевіряємо, що з нашого списку цю умову задовольняють дроби $\dfrac{p}{q}: \dfrac{-1}{1}; \dfrac{3}{1}; \dfrac{-3}{1}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{-1}{2}; \dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{-1}{3}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{3}{4}$.

(Число $\dfrac{1}{6}$ не попадає до списку, оскільки $1-6=-5$ не ділить число 12.)

Візьмемо тепер $x_0=-1$ $f(-1)=12+14+7-3=30\neq 0$. Число не є коренем, використаємо його для зменьшення можливих віріантів перебору. Нехай $m=-1$, тоді для раціонального кореня $\dfrac{p}{q}$ число $p-mq=p+q$ повинне ділити число 30. Безпосередньо перевіряємо, що з нашого списку цю умову задовольняють дроби $\dfrac{p}{q}: \dfrac{-3}{1}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{-1}{2}; \dfrac{3}{2}; \dfrac{-1}{3}; \dfrac{1}{4}$.

Візьмемо $m=2$. Тоді $f(2)=192-112-14-3=63\neq 0$ та для раціонального кореня $\dfrac{p}{q}$ число $p-mq=p-2q$ має ділити 63. Із залишевшогося списку цю умову задовольняють дроби $\dfrac{p}{q}: \dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}; \dfrac{-1}{3}; \dfrac{1}{4}$. Оскільки чисел залишилося мало, то перевіряємо, чи є число коренем рівняння, за схемою Горнера.

	x^4	x^3	x^2	x	x^0	зауваження
	12	-14	0	-7	-3	
$\frac{1}{2}$	12	-8	-47	-9	$\neq 0$	не є коренем
$\frac{3}{2}$	12	4	6	2	0	є коренем
$\frac{3}{2}$	12	22	39	$\neq 0$		корінь простий

$f(x)=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\left(12x^3+4x^2+6x+2\right)$.

	x^3	x^2	x	x^0
	12	4	6	2
$\frac{-1}{3}$	12	0	6	0

$f(x)=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)\left(12x^2+6\right)$. $\square$

Приклад 109. *Для матриці* $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *знайти* $f(A) = e^A$.

Розв'язування. Складаємо характеристичне рівняння матриці A:
$\det(A - \lambda E) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$
Розкриваємо цей визначник за елементами другого рядка:
$-(1+\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(\lambda(\lambda+2)+1) = -(1+\lambda)(\lambda+1)^2 = -(\lambda+1)^3$.

Знайдемо мінімальний многочлен матриці.

Оскільки $A - \lambda E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,
$\operatorname{rang}(A - \lambda E) = 1$ і $\operatorname{def}(A - \lambda E) = 2$. Отже, жорданова нормальна форма має дві клітинки, тобто має вигляд $A_J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Мінімальний многочлен буде мати вигляд $\psi = (\lambda+1)^2$ (степень множника $(\lambda - \lambda_0)$ дорівнює максимальної розмірності клітинки, що відноситься до власного числа λ_0).

Далі можна йти різними шляхами.

Перший спосіб. Знайдемо значення функції $f(\lambda) = e^\lambda$ на спектрі матриці A. Враховуючи кратність кореня мінімального многочлена отримаємо значення

$$f(-1) = e^{-1},\ f'(-1) = e^{-1}.$$

Тепер знайдемо многочлен $g(\lambda)$, який задовольняє умовам

$$g(-1) = f(-1) = \frac{1}{e},$$

$$g'(-1) = f'(-1) = \frac{1}{e}.$$

Оскільки умови дві, то в якості $g(\lambda)$ достатньо розглянути многочлен першого порядку $g(\lambda) = a \cdot \lambda + b$. Знайдемо невідомі a та b з системи:
$$\begin{cases} -a + b = \dfrac{1}{e}, \\ \qquad a = \dfrac{1}{e} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{e}, \\ b = \dfrac{2}{e}. \end{cases}$$

Таким чином, $g(\lambda) = \frac{1}{e}\lambda + \frac{2}{e}$. Нарешті, знаходимо значення функції:
$$f(A) = g(A) = \tfrac{1}{e}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \tfrac{2}{e}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{e}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{e} & -\frac{1}{e} \\ 0 & \frac{1}{e} & 0 \\ \frac{1}{e} & -\frac{1}{e} & \frac{2}{e} \end{pmatrix}.$$

Другий спосіб. Спочатку знайдемо жорданів базис (що зводить матрицю A до жорданової нормальної форми).

Власними числами матриці A є $\lambda_{1,2,3} = -1$ (одне число кратності 3). Знайдемо власні вектори, що відповідають цьому власному числу. Для цього розв'яжемо систему $(A + E)\overline{x} = 0$:
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Маємо одне рівняння $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Нехай $x_3 = t$, $x_2 = p$. Тоді $x_1 = p - t$ та $\overline{x} = (p - t, p, t)$ — власний вектор.

З'ясуємо, при яких p та t до власного вектора "можна приєднати вектор"і знайдемо цей приєднаний вектор. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - t \\ p \\ t \end{pmatrix}.$$
$$\begin{cases} -y_1 + y_2 - y_3 = p - t, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = p, \Rightarrow \\ \qquad y_1 - y_2 + y_3 = t. \end{cases}$$

$p = 0, t$ — довільне. Нехай $t = 1$. Тоді маємо $y_1 - y_2 + y_3 = 1$. Покладемо $y_3 = u$; $y_2 = v$. Тоді $y_1 = 1 + v - u$. $\overline{y} = (1 + v - u, u, v)$. Нехай $u = v = 0$. Таким чином,
$\overline{x_3} = (1, 0, 0)$ —приєднаний вектор,
$\overline{x_2} = (-1, 0, 1)$ — власний вектор до якого приєднали $\overline{x_3}$,
$\overline{x_1} = (1, 1, 0)$ — власний вектор.

В базисі

$$\overline{x_1} = (1, 1, 0),\ \overline{x_2} = (-1, 0, 1),\ \overline{x_3} = (1, 0, 0)$$

матриця A набуває вигляду $A_J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Нагадаємо, що функція діє на кожну жорданову клітинку за правилом:

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2!} & ... \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & ... \\ 0 & 0 & f(\lambda) & ... \\ ... & ... & ... & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

де λ - відповідне власне число.
Отже, в жордановому базисі функція від матриці має значення
$e^A = \begin{pmatrix} \frac{1}{e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{e} & \frac{1}{e} \\ 0 & 0 & \frac{1}{e} \end{pmatrix}$.
Залишається повернутись до початкового базису.

Матриця переходу $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Оскільки вона невироджена, то існує $T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
І, нарешті,

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{e} & \frac{1}{e} \\ 0 & 0 & \frac{1}{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \tfrac{1}{e} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \tfrac{1}{e} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \tfrac{1}{e} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{e} & -\frac{1}{e} \\ 0 & \frac{1}{e} & 0 \\ \frac{1}{e} & -\frac{1}{e} & \frac{2}{e} \end{pmatrix}.$$

$\square$

Основна література

[1] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.–М.: Наука.–1966

[2] Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре.– М.: Наука.–1966

[3] Дискант В. І., Береза Л. Р., Грижук О. П., Захаренко Л. М. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. – К.: Вища шк.,– 2001,

[4] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра.– М.: Наука.–1999

[5] Калужнін Л. А., Вишенський В. А., Шуб Ц. О. Лінійні простори. – К.: Вища шк., – 1971.

[6] Курош А.Г. Курс высшей алгебры.– М.: Наука.–1968

[7] Мальцев А.И. Основы линейной алгебры.– М.: Наука.–1975

[8] Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.– М.: Наука.–1978

[9] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре.– М.:–1999

Додаткова література

[1] Беллман Р. Введение в теорию матриц.– М.: Наука.–1976

[2] Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые её приложения.– М.: Наука.-1985

[3] Завало С.Т. Курс алгебри. – К.: Вища школа,– 1985

[4] Завало С. Т., Костарчук В. М., Хацет Б. І. Алгебра і теорія чисел. Ч.1.– К.: Вища шк.,– 1974.

[5] Кострикин А.И. Введение в алгебру.– М.: Наука.–1977

[6] Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч.1: Основы алгебры. – М.: Физматлит. –2001

[7] Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия.– М.–1985

[8] Лопатинский Я.Б. Основы линейной алгебры.– Львов.–1954

[9] Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения.– М.: Мир.–1980

Збірник задач

Лінійна алгебра в задачах та прикладах

Укладачі:
Авдєєва Тетяна Василівна,
Шраменко Володимир Миколайович