МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«Київський політехнічний інститут»

Т.В. Авдєєва О.Б. Качаєнко

РЯДИ ФУР'Є

Практикум

Київ
НТУУ «КПІ»
2016

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«Київський політехнічний інститут»

Т.В. Авдєєва О.Б. Качаєнко

РЯДИ ФУР'Є

Практикум

"Рекомендовано"
Методичною радою ФМФ НТУУ "КПІ"

Київ
НТУУ «КПІ»
2016

УДК 517
518.45 (075.8)
ББК 22.161.542

*Гриф надано методичною радою ФМФ НТУУ «КПІ»
(протокол № 4 від 27 квітня 2016 р.)*

Рецензенти: **Дюженкова Ольга Юріївна**
кандидат фіз.–мат. наук,
доцент кафедри вищої та прикладної математики НУБіП

Рибачук Людмила Віталіївна
кандидат фіз.–мат. наук,
доцент кафедри вищої та обчислювальної математики НАУ

Прохоренко Наталія Володимирівна,
кандидат фіз.–мат. наук,
старший викладач кафедри математичного аналізу
та теорії ймовірностей ФМФ, НТУУ "КПІ"

Відповідальний
редактор: **Дудкін Микола Євгенович,**
доктор фіз.-мат. наук,
професор кафедри диференціальних рівнянь
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Ряди Фур'є. Практикум.
/Т.В. Авдєєва, О.Б. Качаєнко- К.: НТУУ «КПІ», 2016. – 88 с. – Бібліогр.: с. 88. –100 пр.

У практикумі викладено короткі теоретичні відомості з рядів Фур'є, детально розглядаються приклади розв'язування задач основних типів. Наводяться варіанти індивідуальних завдань для студентів.

Призначений для студентів інженерно-фізичного факультету НТУУ " КПІ ", може бути використаний також в інших університетах при вивчені розділу " Ряди Фур'є ".

УДК 517
518.45 (075.8)
ББК 22.161.542

Передмова

Студенти молодших курсів стикаються із певними труднощами при засвоєнні великої кількості нових понять вищої математики, які широко використовуються в інших розділах математики, а також на старших курсах в спеціальних дисциплінах. Головна мета цієї роботи – допомогти студентам засвоїти основні поняття теорії тригонометричних рядів, необхідних їм при вивчення курсу математичної фізики та свідомого застосування набутих знань в прикладних задачах фізики, механіки та задачах фахових спеціальностей.

Практикум з вищої математики «Ряди Фур'є» має за мету організувати індивідуальну (самостійну) роботу студентів при вивченні розділу «Ряди».

Запропонований практикум з вищої математики «Ряди Фур'є» призначено для студентів інженерних спеціальностей. Він містить короткі теоретичні відомості, а саме означення, формулювання теорем та тверджень (без доведень), формули необхідні для свідомого та успішного розв'язування індивідуальних завдань.

Практикум містить біля 20 розв'язаних прикладів, які супроводжуються коментаріями та малюнками. В практикумі використані в основному авторські задачі. Для індивідуальної роботи запропоновано 30 варіантів завдань, схожих за структурою та одного рівня складності. Метою індивідуальних завдань є перевірка результативності самостійної роботи студентів по даному модулю. Студент повинен самостійно розв'язати індивідуальні завдання свого варіанта, якій відповідає номеру студента у списку навчальної групи.

У додатках наведені основні формули обчислення розвинень в ряд Фур'є, перелік теоретичних питань, перелік рекомендованої літератури.

Посібник може бути використаний студентами технічних спеціальностей, для яких не передбачено вивчення теми «Ряди Фур'є» у повному обсязі. .

РЯДИ ФУР'Є

§ 1. Попередні відомості

Функцію $f(x)$ називають **періодичною**, якщо існує додатне дійсне число $T>0$, таке що $f(x+T)=f(x)$. Найменше серед таких значень T називають періодом функції $f(x)$. Якщо функція $f(x)$ є періодичною з періодом T, то функція $f(kx)$ має період $\dfrac{T}{k}$. Так період функцій $\sin x$, $\cos x$ буде $T=2\pi$, $\sin 5x$ має період $T=\dfrac{2\pi}{5}$, а $\cos 3x$ – відповідно $T=\dfrac{2\pi}{3}$. Зі школи ви пам'ятаєте інші періодичні функції – згадайте їх та відповідні їм періоди.

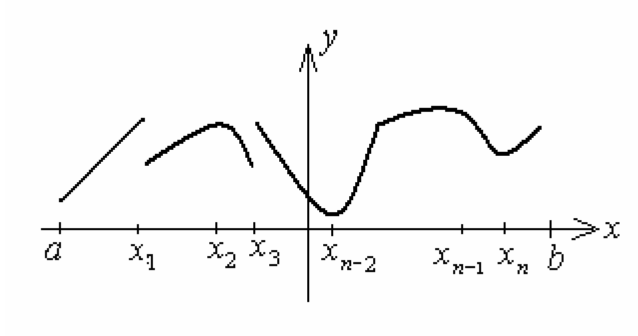
Якщо функція $f(x)$ має період T, то $\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx$.

Функцію $f(x)$ називають **обмеженою** на інтервалі $(a;b)$, якщо існує додатне дійсне число $M>0$, таке що $|f(x)|<M$ для всіх значень $x\in(a;b)$.

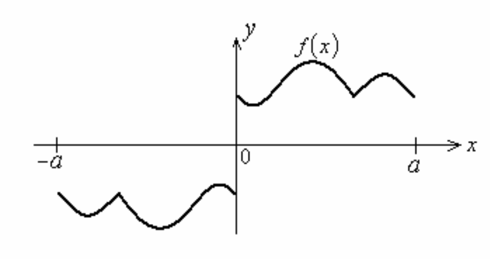
Функцію $f(x)$ називають **кусково-неперервною** на інтервалі $(a;b)$, якщо цей інтервал можна розбити точками $x_1, x_2, ..., x_n$ на інтервали $(a;x_1)$, $(x_1;x_2)$, …, $(x_{n-1};x_n)$, $(x_n;b)$ так, що на кожному з них функція є неперервною, а точки $x_1, x_2, ..., x_n$ є точками або неперервності, або точками розриву першого роду (усувний розрив або «стрибок»).

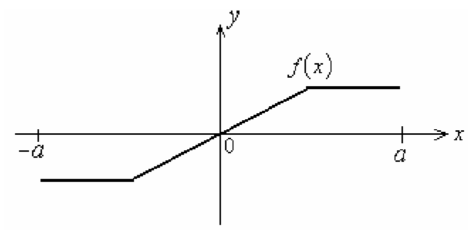
Функцію $f(x)$ називають **зростаючою (спадною)** на інтервалі $(a;b)$, якщо на цьому інтервалі для всіх $x_1<x_2$ маємо $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$). Зростаючі й спадні функції називають монотонними.

Функцію $f(x)$ називають **кусково-монотонною** на інтервалі $(a;b)$, якщо цей інтервал можна розбити точками $x_1, x_2, ..., x_n$ на інтервали $(a;x_1)$, $(x_1;x_2)$, …, $(x_{n-1};x_n)$, $(x_n;b)$ так, що на кожному з них функція є монотонною (незростаючою або неспадною).



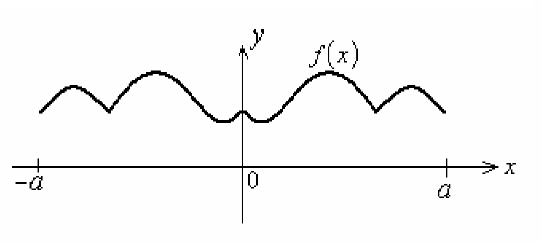
Функцію $f(x)$ називають **непарною** на інтервалі $(-a;a)$, якщо $f(-x)=-f(x)$ для всіх точок x із цього інтервалу. До непарних функцій відносяться, наприклад, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, x, x^3, $\sqrt[3]{x}$ тощо. Графіки непарних функцій є симетричними відносно початку координат.

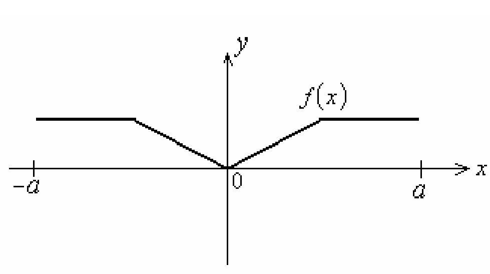




Сума, різниця непарних функцій буде непарною функцією, добуток або частка парної кількості непарних функцій буде парною функцією, а добуток або частка непарної кількості непарних функцій буде функцією непарною. Таким чином $x\sin x$ – функція парна.

Функцію $f(x)$ називають **парною** на інтервалі $(-a;a)$, якщо $f(-x)=f(x)$ для всіх точок x із цього інтервалу. До відомих Вам парних функцій відносяться, наприклад, $\cos x$, $|x|$, 2 (точніше: довільна константа, відмінна від нуля), x^2, $\sin^2 x$ тощо. Графіки парних функцій є симетричними відносно осі координат $0Y$.





Сума, різниця, добуток парних функцій буде парною функцією.

При множенні парної функції на непарну функцію ми отримаємо функцію непарну. Дійсно, нехай $f(x)$ – непарна функція, а $g(x)$ – парна. Тоді $f(-x)\cdot g(-x) = -f(x)\cdot g(x)$ – непарна функція. Таким чином, функція $x^2 \sin x$ є непарною.

Якщо функція $f(x)$ є непарною, тоді $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Якщо функція $f(x)$ є парною, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$.

Якщо функція $f(x)$ не є непарною, не є парною, тобто $f(-x) \neq \pm f(x)$, то її називають функцією загального типу.

Під час роботи із тригонометричними рядами потрібно пам'ятати деякі відомі тригонометричні факти та математичні формули, а саме:

$\sin 0 = \sin \pi = 0$ $\quad$ $\sin \pi n = \sin(-\pi n) = 0$

$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ $\quad$ $\sin(\alpha \pm \pi n) = (-1)^n \sin \alpha$

$\sin \dfrac{\pi}{2} = 1$, $\sin \dfrac{3\pi}{2} = -1$ $\quad$ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n\right) = (-1)^n$

$\cos 0 = 1$ $\quad$ $\cos \pi = -1$ $\quad$ $\cos \pi n = \cos(-\pi n) = (-1)^n$

$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ $\quad$ $\cos(\alpha \pm \pi n) = (-1)^n \cos \alpha$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n\right) = 0$

Формули перетворення добутків тригонометричних формул в суму:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right],$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right],$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right],$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2\alpha)\right],$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\left[1+\cos(2\alpha)\right],$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin(2\alpha).$$

Важливі формули інтегрування:

$$\int_a^b \cos kx\,dx = \frac{1}{k}\sin kx\Big|_a^b \quad \int_a^b \sin kx\,dx = -\frac{1}{k}\cos kx\Big|_a^b \quad \int_a^b u\,dv = u\,v\big|_a^b - \int_a^b v\,du\,.$$

§ 2. Ортогональна система функцій

Систему кусково-неперервних на відрізку $[a;b]$ функцій $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, … , $\varphi_n(x)$ називають **ортогональною** на цьому відрізку, якщо скалярний добуток цих функцій $(\varphi_n(x),\varphi_k(x)) = \int_a^b \varphi_n(x)\cdot\varphi_k(x)dx = 0$ при умові $n\neq k$. Якщо $(\varphi_n(x),\varphi_k(x)) = \begin{cases}0, & n\neq k,\\ 1, & n=k,\end{cases}$ то систему функцій $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, … , $\varphi_n(x)$ називають **ортонормованою**. Покажемо, що система функцій $\{\sin kx, \cos nx\}$ є ортогональною системою із спільним періодом $T=2\pi$. Дійсно, при $n\neq\pm k$ маємо:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\sin nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(k-n)x-\cos(k+n))xdx =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(k-n)x}{(k-n)}-\frac{\sin(k+n)x}{(k+n)}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(k-n)\pi}{(k-n)}-\frac{\sin(k+n)\pi}{(k+n)}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{\sin(k-n)\pi}{(k-n)}+\frac{\sin(k+n)\pi}{(k+n)}\right)=0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cdot\cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(k-n)x+\cos(k+n))xdx =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(k-n)x}{(k-n)}+\frac{\sin(k+n)x}{(k+n)}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(k-n)\pi}{(k-n)}+\frac{\sin(k+n)\pi}{(k+n)}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{-\sin(k-n)\pi}{(k-n)}+\frac{-\sin(k+n)\pi}{(k+n)}\right)=0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\cos nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(k-n)x+\sin(k+n))xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-\cos(k-n)x}{(k-n)}+\frac{\cos(k+n)x}{(k+n)}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(k-n)\pi}{(k-n)}-\frac{\sin(k+n)\pi}{(k+n)}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{\sin(k-n)\pi}{(k-n)}+\frac{\sin(k+n)\pi}{(k+n)}\right)=0,\ n\neq\pm k.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\sin nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx)xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2nx}{2n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\sin 2n\pi}{2n}\right)-\frac{1}{2}\left(-\pi+\frac{\sin 2n\pi}{2n}\right)=\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\cos nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2nxdx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-\cos 2nx}{2n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 2n\pi}{2n}-\frac{\cos(-2n\pi)}{2n}\right)=0,\ \text{при}\ n\neq 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 2nx}{2n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2}\left(\pi+\frac{\sin 2n\pi}{2n}\right)-\frac{1}{2}\left(-\pi-\frac{\sin 2n\pi}{2n}\right)=\pi,\ \text{при}\ n\neq 0.$$

Таким чином, система тригонометричних функцій 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, …, $\cos nx$, $\sin nx$, … є ортогональною системою зі спільним періодом $T=2\pi$. Зауважимо також, що тригонометрична система функцій 1, $\cos\frac{\pi x}{l}$, $\sin\frac{\pi x}{l}$, $\cos\frac{2\pi x}{l}$, $\sin\frac{2\pi x}{l}$, …, $\cos\frac{\pi nx}{l}$, $\sin\frac{\pi nx}{l}$, … зі спільним періодом $T=2l$ є ортогональною на відрізку $[-l;l]$

§ 3. Тригонометричні ряди Фур'є

Серед функціональних рядів у математиці особливу роль відіграють ряди, членами яких є функції певних типів. На практиці найчастіше працюють із тригонометричними рядами, а саме:

тригонометричним рядом за косинусами:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots + a_n \cos nx + \ldots,$$

тригонометричним рядом за синусами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots + a_n \sin nx + \ldots,$$

або загальним (повним) тригонометричним рядом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) = a_0 + \left(a_1 \cos x + b_1 \sin x\right) + \ldots + \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) + \ldots.$$

Функціональний ряд виду $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l}$, коефіцієнти якого обчислюються за формулами Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_a^{a+T} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+T} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+T} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,$$

називається **рядом Фур'є** функції $f(x)$. Цей ряд збігається для будь-якого значення x, в усіх точках неперервності функції сума ряду $S(x) = f(x)$.

При цьому, якщо ряд збігається до функції $f(x)$, то кажуть про **розвинення функції $f(x)$ в ряд Фур'є**.

Виявляється, що в ряд Фур'є можна розвинути досить широкий клас функції, але далеко не всі функції. Виникає питання: яким умовам повинна задовольняти функція $f(x)$, щоб можна було розвинути її в ряд Фур'є? Відповідь на це питання дає наступна теорема:

Теорема Діріхле. Нехай функція $f(x)$ є обмеженою, періодичною з періодом $T = 2l$, кусково-монотонною та кусково-неперервною на періоді (тобто на періоді вона має скінчене число точок розриву першого роду). Тоді на цьому періоді:

а) ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається до $f(x)$ в усіх точках неперервності;

б) в точках розриву x_0 сума ряду дорівнює середньому арифметичному односторонніх границь в околі цієї точки, тобто півсумі лівосторонньої та правосторонньої границь функції $f(x)$:

$$S(x_0)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2};$$

в) в граничних точках сума ряду дорівнює також середньому арифметичному односторонніх границь в околі цієї точки $S(x_0)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$;

г) на кожному відрізку неперервності функції $f(x)$ ряд Фур'є збігається абсолютно й рівномірно до $f(x)$.

§ 4. Розвинення в ряди Фур'є 2π – періодичних функцій

Якщо $f(x)$ є функцією періоду $T=2\pi$, то її розвинення в ряд Фур'є має вигляд $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$, де

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx.$$

Враховуючи властивості визначеного інтеграла по симетричному інтервалу інтегрування, можна значно спростити обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є для функцій певного типу. Так якщо 2π - періодична функція $f(x)$ є парною, тобто виконується умова $f(-x)=f(x)$, то вона розкладається в ряд Фур'є тільки за косинусами:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

де $\qquad a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\,dx,\qquad a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\qquad b_n=0.$

Непарна 2π- періодична функція $f(x)$ розкладається в ряд Фур'є тільки за синусами ($a_0 = 0$, $a_n = 0$):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \text{ де } \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

§ 5. Ряди Фур'є для функцій, заданих на проміжку $[\,0; l\,]$

Якщо функцію $y = f(x)$ задано на проміжку $[\,0; l\,]$, то її визначення можна доповнити для проміжку $[-l; 0\,)$, та побудувати розвинення отриманої функції в ряд Фур'є.

У випадку, коли функцію продовжено на проміжку $[-l; 0\,)$ парним образом, отримують розвинення заданої на $[\,0; l\,]$ функції за косинусами:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad x \in [\,0; l\,],$$

$$\text{де } \; a_0 = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\,dx, \;\; a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Якщо продовження є непарним, отримують розвинення заданої функції за синусами:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \;\; x \in [\,0; l\,],$$

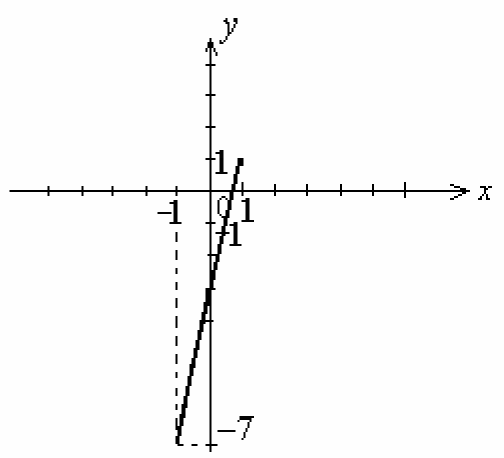
$$\text{де } \quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Аналогічно будується розвинення в ряд Фур'є функцій, заданих на проміжку $[\,-l; 0\,]$.

§ 6. Приклади розв'язування задач

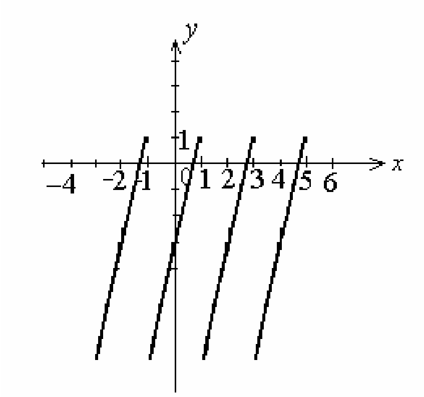
Приклад 1. Розвинути функцію $f(x) = 4x - 3$ в ряд Фур'є на інтервалі $(-1;1)$, при умові, що $f(x+2) = f(x)$.

Розв'язування. Побудуємо графік функції на вказаному інтервалі. Функція є лінійною, тому беремо довільні дві точки з інтервалу $(-1;1)$. Нехай $x = 1$, тоді $y = 4 - 3 = 1$. Нехай тепер $x = -1$, тоді $y = -4 - 3 = -7$. Отримали такий графік:



Графік нашої функції несиметричний ні відносно осі $0Y$, ні відносно початку координат, тобто ми маємо функцію загального типу. Це означає, що потрібно буде шукати всі коефіцієнти ряду Фур'є. Довжина основного періоду $T = 2 = 2l$, отже, $l = 1$.

Враховуючи періодичність функції, маємо:



Таким чином, $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos \pi nx + b_n \sin \pi nx$.

Обчислимо коефіцієнти цього ряду.

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (4x - 3)\,dx = \left(2x^2 - 3x\right)\Big|_{-1}^{1} = 2(1 - 1) - 3(1 - (-1)) = -6.$$

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\cos \pi nx\,dx = \int_{-1}^{1} (4x - 3)\cos \pi nx\,dx =$$

$$=\left\{\begin{array}{ll} \textit{інтегрування} & \textit{частинами} \\ u=4x-3 & du=4dx \\ dv=\cos\pi nx\,dx & v=\dfrac{1}{\pi n}\sin\pi nx \end{array}\right\}=$$

$$=\left((4x-1)\frac{1}{\pi n}\sin\pi nx\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{1}{\pi n}\sin\pi nx(4dx)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left((4-3)\underbrace{\sin n\pi}_{0}-(-4-3)\underbrace{\sin(-n\pi)}_{0}\right)+\frac{4}{\pi n}\cdot\frac{1}{\pi n}\cos\pi nx\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{4}{\pi n}\cdot\frac{1}{\pi n}(\cos\pi n-\cos(-\pi n))=0\,.$$

$$b_n=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}f(x)\sin\pi nx\,dx=\int_{-1}^{1}(4x-3)\sin\pi nx\,dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll} \textit{інтегрування} & \textit{частинами} \\ u=4x-3 & du=4dx \\ dv=\sin\pi nx\,dx & v=\dfrac{-1}{\pi n}\cos\pi nx \end{array}\right\}=$$

$$=\left((4x-1)\frac{-1}{\pi n}\cos\pi nx\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{1}{\pi n}\cos\pi nx(4dx)\right)=$$

$$=\frac{-1}{\pi n}\left((4-3)\underbrace{\cos\pi n}_{(-1)^n}-(-4-3)\underbrace{\cos(-\pi n)}_{(-1)^n}\right)+\frac{4}{\pi n}\cdot\frac{1}{\pi n}\sin\pi nx\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}8}{\pi n}+\frac{4}{(\pi n)^2}\left(\underbrace{\sin\pi n}_{0}-\underbrace{\sin(-\pi n)}_{0}\right)=\frac{(-1)^{n+1}8}{\pi n}\,.$$

Таким чином, ряд Фур'є в точках неперервності має вигляд:

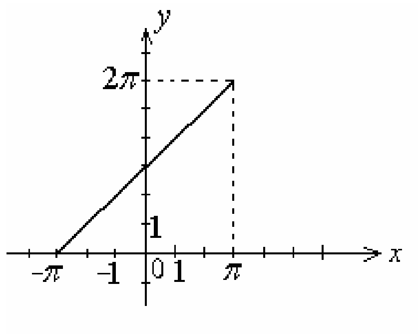
$$y(x)=\frac{-6}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\cdot(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\pi nx=-3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\cdot(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\pi nx\,.$$

В граничних точках: $S(-1)=\dfrac{-7+1}{2}=-3$, $S(1)=\dfrac{1-7}{2}=-3$.

Відповідь. $y(x)=-3+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{8\cdot(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\pi nx$, $S(-1)=-3$, $S(1)=-3$.

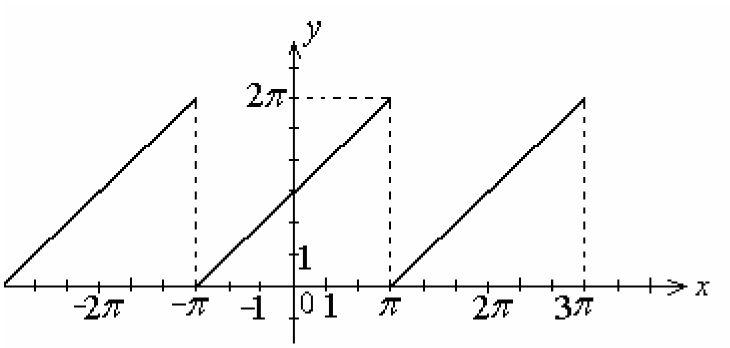
Приклад 2. Розвинути функцію $f(x)=x+\pi$ в ряд Фур'є на інтервалі $(-\pi;\pi)$, при умові $f(x+2\pi)=f(x)$.

Розв'язування. Побудуємо графік функції на вказаному інтервалі. Функція є лінійною, тому беремо довільні дві точки з інтервалу $(-\pi;\pi)$. Нехай $x=\pi$, тоді $y=\pi+\pi=2\pi$. Нехай тепер $x=-\pi$, тоді $y=-\pi+\pi=0$. Отримали такий графік:



Ми маємо функцію загального типу (графік функції несиметричний ні відносно осі $0Y$, ні відносно початку координат). Довжина основного періоду $T=2\pi=2l$, отже $l=\pi$, тому $\frac{\pi nx}{l}=\frac{\pi nx}{\pi}=nx$.

Враховуючи періодичність функції, маємо:



Таким чином, $y=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$.

Обчислимо коефіцієнти цього ряду.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+\pi x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(2\pi^2\right)=2\pi.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\cos nxdx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} \text{інтегрування} & \text{частинами} \\ u=x+\pi & du=dx \\ dv=\cos nx\,dx & v=\dfrac{1}{n}\sin nx \end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left.(x+\pi)\frac{1}{n}\sin nx\right|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx(dx)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left((\pi+\pi)\underbrace{\sin n\pi}_{0}-(-\pi+\pi)\underbrace{\sin(-n\pi)}_{0}\right)+\left.\frac{1}{\pi n}\cdot\frac{1}{n}\cos nx\right|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\cdot\frac{1}{n}(\cos\pi n-\cos(-\pi n))=0.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\sin nx\,dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} \text{інтегрування} & \text{частинами} \\ u=x+\pi & du=dx \\ dv=\sin nx\,dx & v=\dfrac{-1}{n}\cos nx \end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left.(x+\pi)\frac{-1}{n}\cos nx\right|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-1}{n}\cos nx(dx)\right)=$$

$$=\frac{-1}{\pi n}\left((\pi+\pi)\underbrace{\cos\pi n}_{(-1)^n}-(-\pi+\pi)\underbrace{\cos(-\pi n)}_{(-1)^n}\right)+\left.\frac{1}{\pi n}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\right|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{\pi n}+\frac{1}{\pi n^2}\left(\underbrace{\sin\pi n}_{0}-\underbrace{\sin(-\pi n)}_{0}\right)=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Таким чином, ряд Фур’є в точках неперервності має вигляд:

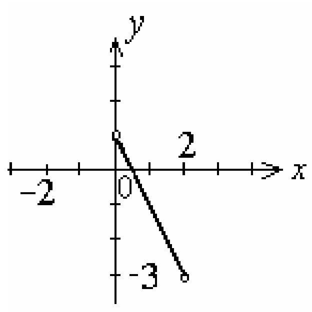
$$f(x)=\frac{2\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

В граничних точках: $S(-\pi)=\dfrac{2\pi+0}{2}=\pi$, $S(\pi)=\dfrac{2\pi+0}{2}=\pi$.

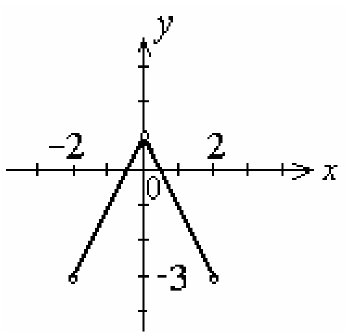
Відповідь. $f(x)=\pi+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$, $S(-\pi)=\pi$, $S(\pi)=\pi$.

Приклад 3. Розвинути функцію $f(x)=1-2x$ задану на інтервалі $(0;2)$ в ряд Фур'є за косинусами.

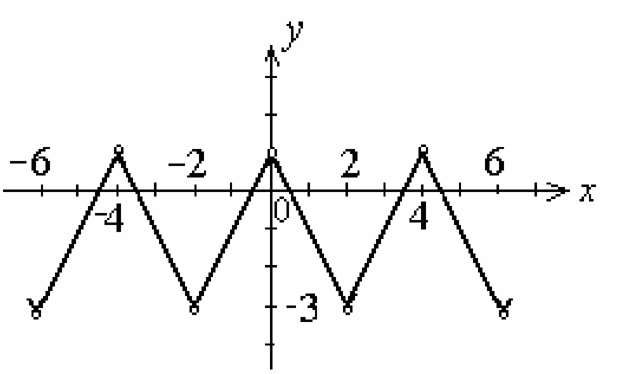
Розв'язування. Побудуємо графік функції на вказаному інтервалі. Функція є лінійною, тому беремо довільні дві точки з інтервалу $(0;2)$. Нехай $x=2$, тоді $y=1-4=-3$. Нехай тепер $x=0$, тоді $y=1-0=1$. Отримали такий графік:



Оскільки потрібен ряд Фур'є за косинусами, то на інтервал $(-2;0)$ відображаємо функцію парним чином. Довжина основного періоду $T=4=2l$, отже, $l=2$.



Враховуючи періодичність функції, маємо:



Таким чином, $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{2}$,

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx, \qquad b_n = 0.$$

Обчислимо коефіцієнти цього ряду.

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (1-2x)dx = \left(x - x^2\right)\Big|_0^2 = \left((2-0)-(4-0)\right) = -2.$$

$$a_n = \int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi n x}{2}dx = \int_0^2 (1-2x)\cos\frac{\pi n x}{2}dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} \textit{інтегрування} & \textit{частинами} \\ u = 1-2x & du = -2dx \\ dv = \cos\frac{\pi n x}{2}dx & v = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2} \end{array}\right\} =$$

$$= \left((1-2x)\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}(-2dx) \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left((1-4)\underbrace{\sin n\pi}_{0} - (1-0)\underbrace{\sin 0}_{0} \right) + \frac{4}{\pi n}\cdot\frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{-8}{(\pi n)^2}(\cos\pi n - \cos 0) = \frac{-8}{(\pi n)^2}\left((-1)^n - 1\right).$$

Таким чином, ряд Фур'є в точках неперервності має вигляд:

$$f(x) = \frac{-2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-8\cdot\left((-1)^n - 1\right)}{(\pi n)^2}\cos\frac{\pi n x}{2} = -1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-8\cdot\left((-1)^n - 1\right)}{(\pi n)^2}\cos\frac{\pi n x}{2}.$$

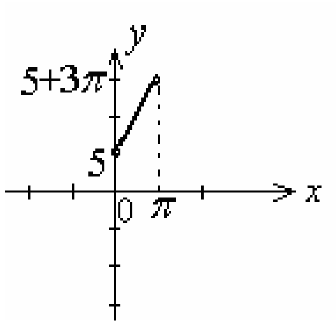
В граничних точках: $S(0) = \frac{1+1}{2} = 1$, $S(2) = S(-2) = \frac{-3-3}{2} = -3$.

Відповідь. $f(x) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-8\cdot\left((-1)^n - 1\right)}{(\pi n)^2}\cos\frac{\pi n x}{2}$,

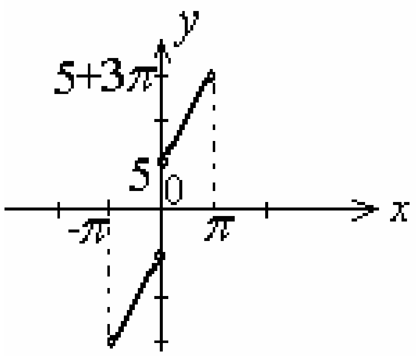
$S(0) = 1$, $S(2) = S(-2) = -3$.

Приклад 4. Розвинути функцію $f(x) = 5 + 3x$ задану на інтервалі $(0;\pi)$ в ряд Фур'є за синусами.

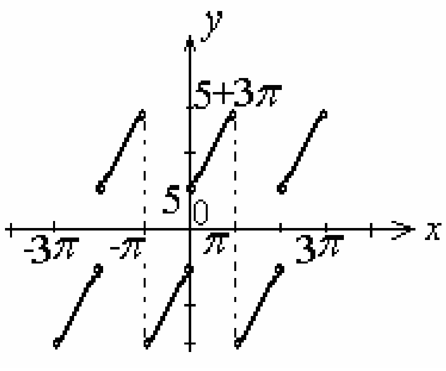
Розв'язування. Побудуємо графік функції на вказаному інтервалі. Функція є лінійною, тому беремо довільні дві точки з інтервалу $(0;2)$. Нехай $x = \pi$, тоді $y = 5 + 3\pi$. Нехай тепер $x = 0$, тоді $y = 5$. Отримали такий графік:



Оскільки потрібен ряд Фур'є за синусами, то на інтервал $(-\pi;0)$ відображаємо функцію непарним чином – симетрично відносно початку координат. Довжина основного періоду $T = 2\pi = 2l$, отже $l = \pi$, та $\frac{\pi n x}{l} = nx$, $a_0 = 0$, $a_n = 0$.



Враховуючи періодичність функції, маємо:



Таким чином, $a_0 = 0$, $\quad a_n = 0$,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx\,,\quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx\,.$$

Обчислимо коефіцієнти цього ряду.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(5+3x)\cos nx dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} \textit{інтегрування} & \textit{частинами} \\ u=5+3x & du=3dx \\ dv=\cos nx dx & v=\dfrac{1}{n}\sin nx \end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left((5+3x)\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx(3dx)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left((5+3\pi)\underbrace{\sin n\pi}_{0}-(5-0)\underbrace{\sin 0}_{0}\right)+\frac{2}{\pi n}\cdot\frac{3}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{6}{\pi n^2}(\cos\pi n-\cos 0)=\frac{6}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right).$$

Таким чином, ряд Фур'є в точках неперервності має вигляд:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6\cdot\left((-1)^n-1\right)}{\pi n^2}\sin nx\,.$$

В граничних точках: $S(0)=\dfrac{-5+5}{2}=0$,

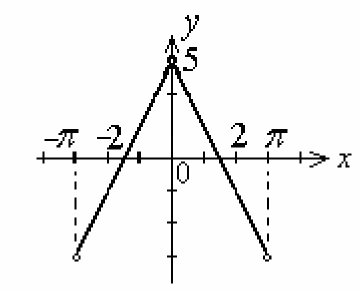
$$S(\pi)=\frac{(5+3\pi)+(-5-3\pi)}{2}=0\,,$$

$$S(-\pi)=\frac{-(5+3\pi)+(5+3\pi)}{2}=0\,.$$

Відповідь. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{6\cdot\left((-1)^n-1\right)}{\pi n^2}\sin nx$, $S(0)=S(\pi)=S(-\pi)=0$.

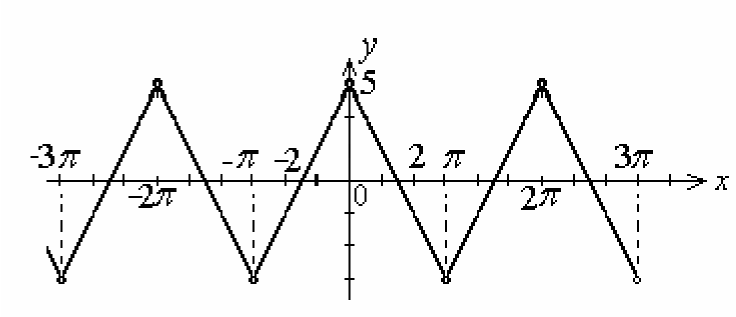
Приклад 5. Розвинути функцію $f(x)=5-2|x|$ задану на інтервалі $-\pi < x < \pi$ в ряд Фур'є при умові, що $f(x+2\pi)=f(x)$.

Розв'язування. Побудуємо графік функції на вказаному інтервалі. Функція є лінійною та містить модуль. Графік функції будуємо за контрольними точками. Нехай $x=0$, тоді $y=5-0=5$. Нехай тепер $x=\pi$, тоді $y=5-2\pi$, при $x=-\pi$, маємо $y=5-2\pi$. Отримали такий графік:



Графік функції симетричне відносно осі ординат, отже, функція парна, тому ряд Фур'є буде розвиватися за косинусами. Довжина основного періоду $T=2\pi=2l$, отже, $l=\pi$.

Враховуючи періодичність функції, маємо:



Таким чином, $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx, \qquad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx dx, \qquad b_n=0.$$

Обчислимо коефіцієнти цього ряду.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(5-2x)dx=\frac{2}{\pi}\left(5x-x^2\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(5(\pi-0)-\left(\pi^2-0\right)\right)=10-2\pi.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (5-2x)\cos nx\,dx =$$

$$= \begin{Bmatrix} \textit{інтегрування} & \textit{частинами} \\ u = 5-2x & du = -2dx \\ dv = \cos nx dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left((5-2x)\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n}\sin nx(-2dx) \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left((5-2\pi)\underbrace{\sin n\pi}_{0} - (5-0)\underbrace{\sin 0}_{0} \right) + \frac{2}{\pi n}\cdot\frac{-2}{n}\cos nx\Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{-4}{\pi n^2}(\cos\pi n - \cos 0) = \frac{-4}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right).$$

Таким чином, ряд Фур'є в точках неперервності має вигляд:

$$f(x) = \frac{10-2\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4\cdot\left((-1)^n-1\right)}{\pi n^2}\cos nx = 5 - \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4\cdot\left((-1)^n-1\right)}{\pi n^2}\cos nx.$$

В граничних точках: $S(0) = \frac{5+5}{2} = 5$,

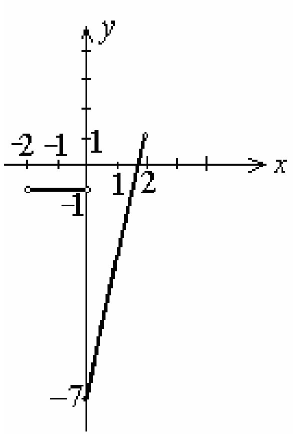
$$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{(5-2\pi)+(5-2\pi)}{2} = 5 - 2\pi.$$

Відповідь. $f(x) = 5 - \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4\cdot\left((-1)^n-1\right)}{\pi n^2}\cos nx$,

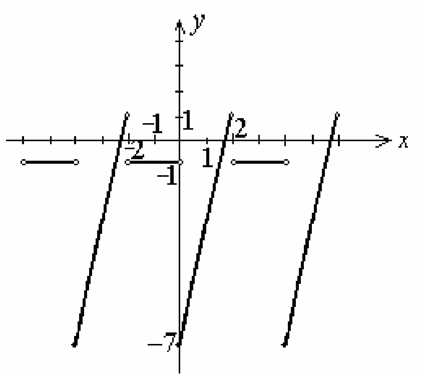
$S(0) = 5$, $S(\pi) = S(-\pi) = 5 - 2\pi$.

Приклад 6. Розвинути функцію $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-2;0) \\ 4x-7, & x \in [0;2). \end{cases}$ в ряд Фур'є, при умові, що $f(x+4) = f(x)$.

Розв'язування. Побудуємо графік функції на вказаному інтервалі. Функція задається неоднозначно, але на кожному інтервалі є лінійною, тому беремо довільні дві точки з інтервалу. Нехай $x = 0$, тоді $y = 0 - 7 = -7$. Нехай тепер $x = 2$, тоді $y = 8 - 7 = 1$. Отримали такий графік:



Графік нашої функції несиметричний ані відносно осі $0Y$, ані відносно початку координат, тобто ми маємо функцію загального типу. Це означає, що потрібно буде шукати всі коефіцієнти ряду Фур'є. Довжина основного періоду $T = 4 = 2l$, отже, $l = 2$. Враховуючи періодичність функції, маємо:



Таким чином, $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos\dfrac{\pi n x}{2} + b_n \sin\dfrac{\pi n x}{2}$.

Обчислимо коефіцієнти цього ряду.

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} -1\,dx + \int_{0}^{2}(4x-7)\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-x\Big|_{-2}^{0} + \left(2x^2 - 7x\right)\Big|_{0}^{2}\right) = \frac{1}{2}\left(-2 + (8-14)\right) = -4.$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} -1\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx + \int_{0}^{2}(4x-7)\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx\right) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \textit{інтегрування} & \textit{частинами} \\ u = 4x - 7 & du = 4dx \\ dv = \cos\dfrac{\pi n x}{2}dx & v = \dfrac{2}{\pi n}\sin\dfrac{\pi n x}{2} \end{matrix}\right\} =$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\bigg|_{-2}^{0}+(4x-7)\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\bigg|_{0}^{2}-\int_0^2\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}(4dx)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-2}{\pi n}\left(\underbrace{\sin 0}_{0}-\underbrace{\sin(-n\pi)}_{0}\right)+\frac{2}{\pi n}\left(\underbrace{(8-1)\sin\pi n}_{0}-(0-7)\underbrace{\sin 0}_{0}\right)-\frac{8}{\pi n}\cdot\frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\bigg|_{0}^{2}\right)=$$

$$=\frac{16}{\pi n}\cdot\frac{1}{\pi n}\left(\underbrace{\cos\pi n}_{(-1)^n}-\underbrace{\cos 0}_{1}\right)=\frac{16}{(\pi n)^2}\left((-1)^n-1\right).$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}-1\sin\frac{\pi nx}{2}dx+\int_0^2(4x-7)\sin\frac{\pi nx}{2}dx\right)=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll}\textit{інтегрування} & \textit{частинами}\\ u=4x-7 & du=4dx\\ dv=\sin\frac{\pi nx}{2}dx & v=\frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\bigg|_{-2}^{0}+(4x-7)\frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\bigg|_{0}^{2}-\int_0^2\frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}(4dx)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi n}\left(\underbrace{\cos 0}_{1}-\underbrace{\cos(-n\pi)}_{(-1)^n}\right)-\frac{2}{\pi n}\left((8-1)\underbrace{\cos\pi n}_{(-1)^n}-(0-7)\underbrace{\cos 0}_{1}\right)+\frac{8}{\pi n}\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\bigg|_{0}^{2}\right)=$$

$$=\frac{2}{2\pi n}\cdot(6-8\cos\pi n)=\frac{1}{\pi n}\left(6-8(-1)^n\right).$$

Таким чином, ряд Фур'є в точках неперервності має вигляд:

$$f(x)=-2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16\cdot\left((-1)^n-1\right)}{(\pi n)^2}\cos\frac{\pi nx}{2}+\frac{\left(6-8(-1)^n\right)}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}.$$

В граничних точках: $S(0)=\frac{-1-7}{2}=-4$, $S(2)=S(-2)=\frac{1-1}{2}=0$.

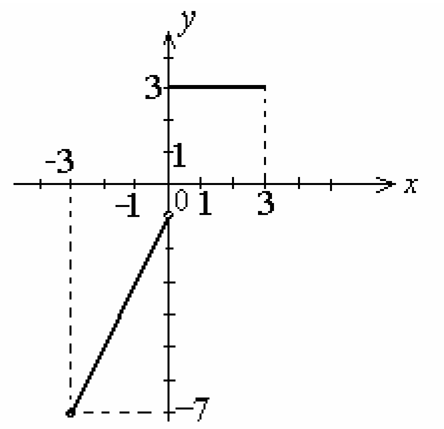
Відповідь. $f(x)=-2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16\cdot\left((-1)^n-1\right)}{(\pi n)^2}\cos\frac{\pi nx}{2}+\frac{\left(6-8(-1)^n\right)}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}$,

$S(0)=-4$, $S(2)=S(-2)=0$.

Приклад 7. Розвинути функцію $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x\in(-3;0) \\ 3, & x\in[0;3). \end{cases}$ в ряд Фур'є,

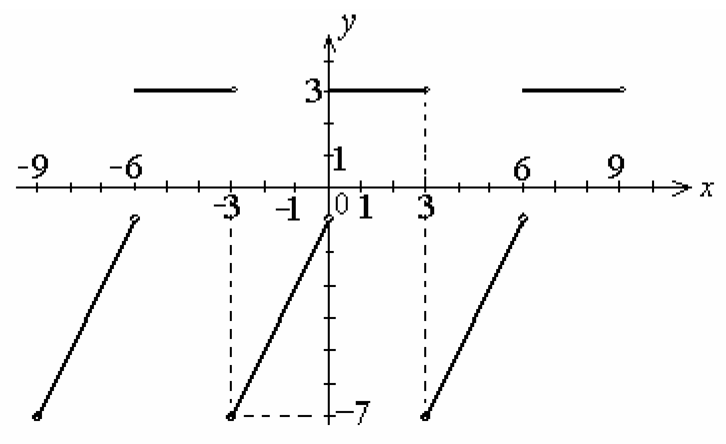
при умові, що $f(x+6)=f(x)$.

Розв'язування. Побудуємо графік функції на вказаному інтервалі. Функція задається неоднозначно, але на кожному інтервалі є лінійною. Беремо довільні дві точки з першого інтервалу. Нехай $x=0$, тоді $y=0-1=-1$. Нехай тепер $x=-3$, тоді $y=-6-1=-7$. На інтервалі $x\in[0;3)$ функція є сталою, а саме: $y=3$. Отримали такий графік:



Графік нашої функції несиметричний ані відносно осі $0Y$, ані відносно початку координат, тобто ми маємо функцію загального типу. Це означає, що потрібно буде шукати всі коефіцієнти ряду Фур'є. Довжина основного періоду $T=6=2l$, отже, $l=3$.

Враховуючи періодичність функції, маємо:



Ми вже з'ясували, що функція є ні парною, ні непарною, отже,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{3}+b_n\sin\frac{n\pi x}{3}.$$

Обчислимо коефіцієнти ряду.

$$a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x-1)dx+\int_{0}^{3}3\cdot dx\right],$$

$$I_1=\int_{-3}^{0}(2x-1)dx=2\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-3}^{0}-x\Big|_{-3}^{0}=0-9-(0+3)=-12,$$

$$I_2=\int_{0}^{3}3\,dx=3x\Big|_{0}^{3}=9-0=0,$$

Таким чином, $a_0=\frac{1}{3}(-12+9)=-1$.

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}y(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x-1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{-3}^{0}3\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right].$$

Обчислимо інтеграли окремо.

$$I_1=\int_{-3}^{0}(2x-1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\left\{\begin{matrix}u=2x-1 & du=2\cdot dx\\ dv=\cos\frac{n\pi x}{3}dx & v=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\end{matrix}\right\}=$$

$$=(2x-1)\cdot\frac{3}{n\pi}\sin\left.\frac{n\pi x}{3}\right|_{-3}^{0}-\frac{3}{n\pi}\cdot 2\int_{-3}^{0}\sin\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=\frac{3}{n\pi}(2x-1)\sin\left.\frac{n\pi x}{3}\right|_{-3}^{0}-\frac{6}{n\pi}\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cdot\cos\left.\frac{n\pi x}{3}\right|_{-3}^{0}=$$

$$=\frac{3}{n\pi}\cdot\left(-1\cdot\underbrace{\sin 0}_{0}-(-7)\underbrace{\sin\frac{n\pi\cdot(-3)}{3}}_{0}\right)+\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(\cos 0-\cos\frac{n\pi\cdot(-3)}{3}\right)=$$

$$=\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(\underbrace{\cos 0}_{1}-\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n}\right)=\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(1-(-1)^n\right).$$

$$I_2=\int_{0}^{3}3\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}dx=3\cdot\frac{3}{n\pi}\sin\left.\frac{n\pi x}{3}\right|_{0}^{3}=\frac{9}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi\cdot 3}{3}-\sin 0\right)=0.$$

$$a_n=\frac{1}{3}\cdot\left[\ \frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(1-(-1)^n\right)+0\ \right]=\frac{6}{n^2\pi^2}\cdot\left(1-(-1)^n\right).$$

$$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}y(x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x-1)\sin\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{-3}^{0}3\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right],$$

$$I_1=\int_{-3}^{0}(2x-1)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\left\{\begin{matrix} u=2x-1 & du=2\cdot dx \\ dv=\sin\frac{n\pi x}{3}dx & v=-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\end{matrix}\right\}=$$

$$=(2x-1)\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-3}^{0}-\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cdot 2\int_{-3}^{0}\cos\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=-\frac{3}{n\pi}(2x-1)\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-3}^{0}+\frac{6}{n\pi}\cdot\frac{3}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-3}^{0}=$$

$$=-\frac{3}{n\pi}\cdot\left(-1\cdot\cos 0-(-7)\cdot\cos\frac{n\pi\cdot(-3)}{3}\right)+\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(\underbrace{\sin 0}_{0}-\underbrace{\sin\frac{n\pi\cdot(-3)}{3}}_{0}\right)=$$

$$=-\frac{3}{n\pi}\cdot\left(-1+7\cdot\underbrace{\cos(-n\pi)}_{(-1)^n}\right)=\ \frac{3}{n\pi}\cdot\left(1-7\cdot(-1)^n\right),$$

$$I_2=\int_{0}^{3}3\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}dx=3\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_{0}^{3}=-\frac{9}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi\cdot 3}{3}-\cos 0\right)=$$

$$=-\frac{9}{n\pi}\left((-1)^n-1\right)=\frac{9}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right),$$

$$b_n=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{3}{n\pi}\cdot\left(1-7\cdot(-1)^n\right)+\frac{9}{n\pi}\cdot\left(1-(-1)^n\right)\right]=\frac{1}{n\pi}\cdot\left(4-10\cdot(-1)^n\right).$$

Таким чином, ряд має вигляд:

$$f(x)=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos\frac{n\pi x}{3}+\frac{1}{n\pi}\left(4-10\cdot(-1)^n\right)\sin\frac{n\pi x}{3}.$$

В граничних точках: $S(0)=\frac{-1+3}{2}=1,\ S(3)=S(-3)=\frac{3-7}{2}=-2$.

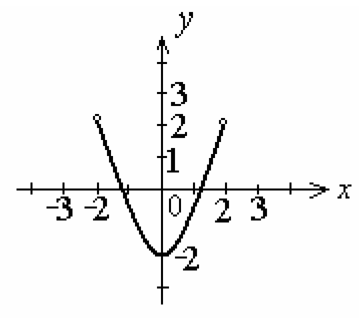
Відповідь. $f(x)=-2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{16\cdot\left((-1)^n-1\right)}{(\pi n)^2}\cos\frac{\pi nx}{2}+\frac{\left(6-8(-1)^n\right)}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}$,

$S(0)=1,\ S(3)=S(-3)-2$.

Приклад 8. Розвинути функцію $f(x)=x^2-2$ в ряд Фур'є на інтервалі $(-2;2)$, при умові, що $f(x+4)=f(x)$.

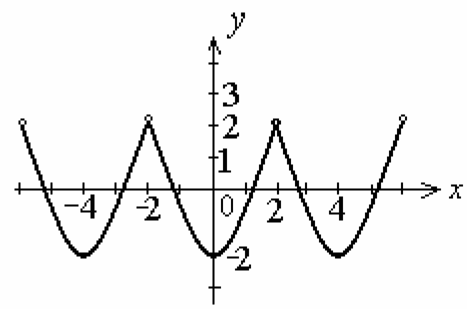
Розв'язування. Побудуємо графік функції на вказаному інтервалі.

Графіком функції є парабола, гілки вгору, вершина в точці $(0;-2)$:



Графік функції симетричний відносно осі $0Y$, тобто ми маємо парну функцію. Довжина основного періоду $T=4=2l$, отже, $l=2$.

Враховуючи періодичність функції, маємо:



Таким чином, $y=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\dfrac{\pi nx}{2}$.

Обчислимо коефіцієнти цього ряду.

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx=\left(\int_0^2\left(x^2-2\right)dx\right)=\left(\frac{x^3}{3}-2x\right)\Bigg|_0^2=\left(\frac{2^3}{3}-4\right)-0=\frac{-4}{3}.$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi nx}{2}dx=\int_0^2\left(x^2-2\right)\cos\frac{\pi nx}{2}dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} \textit{інтегрування} & \textit{частинами} \\ u=x^2-2 & du=2xdx \\ dv=\cos\frac{\pi nx}{2}dx & v=\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2} \end{matrix}\right\}=$$

$$=\left(\left(x^2-2\right)\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2-\int_0^2\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\left(2xdx\right)\right)=$$

$$=\left\{\begin{matrix} \textit{інтегрування} & \textit{частинами} \\ u=2x & du=2dx \\ dv=\sin\frac{\pi nx}{2}dx & v=\frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left(\left(4-2\right)\underbrace{\sin\left(\pi n\right)}_{0}-\left(0-2\right)\underbrace{\sin 0}_{0}\right)-\frac{4}{\pi n}\left(2x\frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2-\int_0^2\frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\left(2dx\right)\right)=$$

$$=-\frac{4}{\pi n}\left(\frac{-4}{\pi n}\left(2\underbrace{\cos\left(n\pi\right)}_{(-1)^n}-0\right)+\frac{4}{\pi n}\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2\right)=$$

$$=\frac{16}{\left(\pi n\right)^2}\left(\left(-1\right)^n-1\right)+0=\frac{16}{\left(\pi n\right)^2}\left(\left(-1\right)^n-1\right).$$

Таким чином, ряд Фур'є в точках неперервності має вигляд:

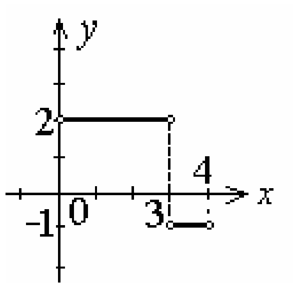
$$f\left(x\right)=\frac{-4}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16\cdot\left(\left(-1\right)^n-1\right)}{\left(\pi n\right)^2}\cos\frac{\pi nx}{2}.$$

В граничних точках: $S\left(2\right)=\frac{2+2}{2}=2$, $S\left(-2\right)=\frac{2+2}{2}=2$.

Відповідь. $f\left(x\right)=\frac{-2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16\cdot\left(\left(-1\right)^n-1\right)}{\left(\pi n\right)^2}\cos\frac{\pi nx}{2}$, $S\left(2\right)=2$, $S\left(-2\right)=2$.

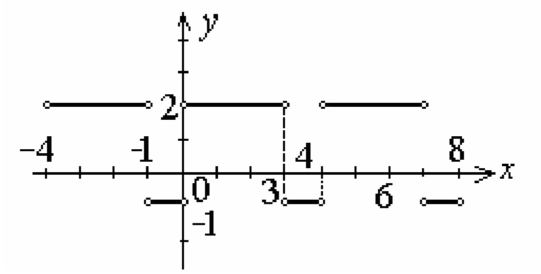
Приклад 9. Розвинути функцію $f\left(x\right)=\begin{cases}2, & x\in\left(0;3\right),\\ -1, & x\in\left(3;4\right).\end{cases}$ в ряд Фур'є на інтервалі $\left(0;4\right)$, при умові, що $f\left(x+4\right)=f\left(x\right)$.

Розв'язування. Побудуємо графік функції на вказаному інтервалі:



Довжина основного періоду $T=4=2l$, отже, $l=2$.

Враховуючи періодичність функції, маємо:



Таким чином, $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos\dfrac{\pi nx}{2}+b_n\sin\dfrac{\pi nx}{2}$.

Обчислимо коефіцієнти цього ряду.

$$a_0=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^3 2dx+\int_3^4 -1dx\right)=\frac{1}{2}\left(2x\Big|_0^3-x\Big|_3^4\right)=\frac{1}{2}(6-1)=\frac{5}{2}.$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\cos\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^3 2\cos\frac{\pi nx}{2}dx+\int_3^4 -1\cos\frac{\pi nx}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^3-\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_3^4\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi n}\left(\sin\frac{3\pi n}{2}-\sin 0\right)-\frac{2}{\pi n}\left(\sin\frac{4\pi n}{2}-\sin\frac{3\pi n}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2}+\frac{2}{\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2}\right)=\frac{3}{\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2}.$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\sin\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^3 2\sin\frac{\pi nx}{2}dx+\int_3^4 -1\sin\frac{\pi nx}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^3-\frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_3^4\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-4}{\pi n}\left(\cos\frac{3\pi n}{2}-\cos 0\right)+\frac{2}{\pi n}\left(\cos\frac{4\pi n}{2}-\cos\frac{3\pi n}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-4}{\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2}+\frac{4}{\pi n}+\frac{2}{\pi n}-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-6}{\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2}+\frac{6}{\pi n}\right).$$

Таким чином, ряд Фур’є в точках неперервності має вигляд:

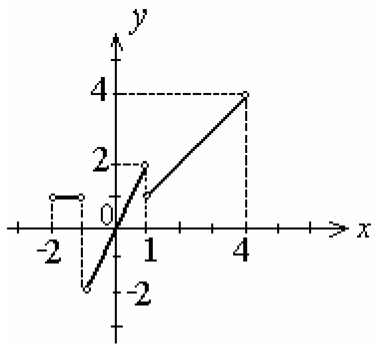
$$f(x)=\frac{5}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2}\cos\frac{\pi nx}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{-6}{\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2}+\frac{6}{\pi n}\right)\sin\frac{\pi nx}{2}.$$

В граничних точках: $S(0)=\dfrac{-1+2}{2}=\dfrac{1}{2}$, $S(3)=\dfrac{2-1}{2}=\dfrac{1}{2}$, $S(4)=\dfrac{2-1}{2}=\dfrac{1}{2}$

Відповідь. $f(x)=\dfrac{5}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{\pi n}\sin\dfrac{3\pi n}{2}\cos\dfrac{\pi nx}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-6}{\pi n}\cos\dfrac{3\pi n}{2}+\dfrac{6}{\pi n}\right)\sin\dfrac{\pi nx}{2}$,

$S(0)=S(3)=S(4)=\dfrac{1}{2}$.

Приклад 10. Розвинути в ряд Фур'є функцію задану графічно



при умові, що $f(x+6)=f(x)$.

Розв'язування. Графік даної функції несиметричний ані відносно початку координат ані відносно осі $0Y$, тому функція загального типу із періодом $T=6=2l$, $l=3$.

Ряд Фур'є має вигляд: $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos\dfrac{\pi nx}{3}+b_n \sin\dfrac{\pi nx}{3}$.

Задамо функцію $f(x)$ аналітично. Функція задається неоднозначно, але на кожному інтервалі є лінійною. На інтервалі $(-2;-1)$ маємо $y=1$. На інтервалі $(-1;1)$ графік функції – пряма, що сполучає точки $M_1(-1;-2)$ та $M_2(1;2)$. Запишемо рівняння прямої M_1M_2 (через дві точки):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+1}{1+1}=\frac{y+2}{2+2}\ ;$$

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{4} \quad \Rightarrow \quad y+2=2x+2 \quad \Rightarrow \quad y=2x.$$

$y=2x$, $x\in(-1;1)$.

На інтервалі $(1;4)$ графік функції – пряма, що сполучає точки $K_1(1;1)$ та $K_2(4;4)$. Запишемо рівняння прямої K_1K_2 (через дві точки):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-1}{4-1}=\frac{y-1}{4-1}\ ;$$

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3} \quad \Rightarrow \quad x-1=y-1 \quad \Rightarrow \quad y=x.$$

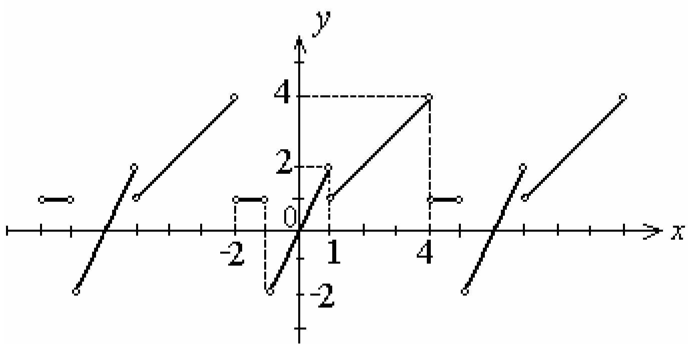
$y=x$, $x\in(1;4)$.

Таким чином, наша функція задається системою:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in(-2;-1),\\ 2x, & x\in(-1;1),\\ x, & x\in(1;4).\end{cases}$$

Довжина основного періоду $T=6=2l$, отже, $l=3$.

Враховуючи періодичність функції, маємо:



Ми вже з'ясували, що функція є ні парною, ні непарною, отже,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{3}+b_n\sin\frac{n\pi x}{3}.$$

Обчислимо коефіцієнти ряду.

$$a_0=\frac{1}{3}\int_{-2}^{4}f(x)dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-2}^{-1}dx+\int_{-1}^{1}2x\,dx+\int_{1}^{4}x\,dx\right],$$

$$I_1=\int_{-2}^{-1}dx=x\Big|_{-2}^{-1}=-1+2=1,$$

$$I_2=\int_{-1}^{1}2x\,dx=2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1}=1-1=0,$$

$$I_3=\int_{1}^{4}x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_{1}^{4}=\frac{16-1}{2}=\frac{15}{2}.$$

Таким чином, $a_0=\frac{1}{3}\left(1+\frac{15}{2}\right)=\frac{17}{6}$.

Тепер знайдемо коефіцієнт a_n.

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-2}^{4}f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-2}^{-1}\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{-1}^{1}2x\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{1}^{4}x\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right]$$

Обчислимо інтеграли окремо.

$$I_1=\int_{-2}^{-1}\cos\frac{\pi n x}{3}dx=\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{3}\bigg|_{-2}^{-1}=\frac{3}{\pi n}\left(\sin\frac{-\pi n}{3}-\sin\frac{-2\pi n}{3}\right)=\frac{3}{\pi n}\left(\sin\frac{2\pi n}{3}-\sin\frac{\pi n}{3}\right)$$

$$I_2=\int_{-1}^{1}2x\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\left\{\begin{matrix} u=2x & du=2\cdot dx \\ dv=\cos\frac{n\pi x}{3}dx & v=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\end{matrix}\right\}=$$

$$=2x\cdot\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{-1}^{1}-\frac{3}{n\pi}\cdot 2\int_{-1}^{1}\sin\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=\frac{6x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{-1}^{1}-\frac{6}{n\pi}\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{6}{n\pi}\cdot\left(1\cdot\sin\frac{n\pi}{3}-(-1)\sin\frac{n\pi\cdot(-1)}{3}\right)+\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{3}-\cos\frac{-n\pi}{3}\right)=0$$

$$I_3=\int_{1}^{4}x\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\left\{\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos\frac{n\pi x}{3}dx & v=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\end{matrix}\right\}=$$

$$=x\cdot\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{1}^{4}-\frac{3}{n\pi}\cdot\int_{1}^{4}\sin\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=\frac{3x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{1}^{4}-\frac{3}{n\pi}\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{1}^{4}=$$

$$=\frac{3}{n\pi}\cdot\left(4\cdot\sin\frac{4n\pi}{3}-1\sin\frac{n\pi}{3}\right)+\frac{9}{n^2\pi^2}\cdot\left(\cos\frac{4n\pi}{3}-\cos\frac{n\pi}{3}\right).$$

Таким чином,

$$a_n=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{\pi n}\left(\sin\frac{2\pi n}{3}-\sin\frac{\pi n}{3}\right)+0+\frac{3}{n\pi}\cdot\left(4\cdot\sin\frac{4n\pi}{3}-1\sin\frac{n\pi}{3}\right)+\frac{9}{n^2\pi^2}\cdot\left(\cos\frac{4n\pi}{3}-\cos\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi n}\left(\sin\frac{2\pi n}{3}-\sin\frac{\pi n}{3}+4\cdot\sin\frac{4n\pi}{3}-1\sin\frac{n\pi}{3}+\frac{3}{n\pi}\cdot\left(\cos\frac{4n\pi}{3}-\cos\frac{n\pi}{3}\right)\right).$$

Тепер знайдемо коефіцієнт b_n.

$$b_n=\frac{1}{3}\int_{-2}^{4}f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-2}^{-1}\sin\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{-1}^{1}2x\sin\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{1}^{4}x\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right].$$

Обчислимо всі інтеграли окремо.

$$I_1=\int_{-2}^{-1}\sin\frac{\pi nx}{3}dx=\frac{-3}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3}\bigg|_{-2}^{-1}=\frac{-3}{\pi n}\left(\cos\frac{-\pi n}{3}-\cos\frac{-2\pi n}{3}\right)=\frac{3}{\pi n}\left(\cos\frac{2\pi n}{3}-\cos\frac{\pi n}{3}\right)$$

$$I_2=\int_{-1}^{1}2x\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\left\{\begin{matrix} u=2x & du=2\cdot dx \\ dv=\sin\frac{n\pi x}{3}dx & v=\frac{-3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\end{matrix}\right\}=$$

$$=2x\cdot\frac{-3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{-1}^{1}-\frac{-3}{n\pi}\cdot 2\int_{-1}^{1}\cos\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=\frac{-6x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{-1}^{1}+\frac{6}{n\pi}\cdot\left(\frac{3}{n\pi}\right)\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{-6}{n\pi}\cdot\left(1\cdot\cos\frac{n\pi}{3}-(-1)\cos\frac{n\pi\cdot(-1)}{3}\right)+\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(\sin\frac{n\pi}{3}-\sin\frac{-n\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{-6}{n\pi}\cdot\left(2\cdot\cos\frac{n\pi}{3}\right)+\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(2\cdot\sin\frac{n\pi}{3}\right)=\frac{-12}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi}{3}+\frac{36}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi}{3}.$$

$$I_3=\int_{1}^{4}x\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\left\{\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\sin\frac{n\pi x}{3}dx & v=\frac{-3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\end{matrix}\right\}=$$

$$=x\cdot\frac{-3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{1}^{4}-\frac{-3}{n\pi}\cdot\int_{1}^{4}\cos\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=\frac{-3x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{1}^{4}+\frac{3}{n\pi}\cdot\left(\frac{3}{n\pi}\right)\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{1}^{4}=$$

$$=\frac{-3}{n\pi}\cdot\left(4\cdot\cos\frac{4n\pi}{3}-1\cos\frac{n\pi}{3}\right)+\frac{9}{n^2\pi^2}\cdot\left(\sin\frac{4n\pi}{3}-\sin\frac{n\pi}{3}\right).$$

Таким чином,

$$b_n=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{\pi n}\left(\cos\frac{2\pi n}{3}-\cos\frac{\pi n}{3}\right)-\frac{12}{n\pi}\cdot\cos\frac{\pi n}{3}+\frac{36}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}-\right.$$
$$\left.-\frac{3}{\pi n}\left(4\cos\frac{4\pi n}{3}-\cos\frac{\pi n}{3}\right)+\frac{9}{n^2\pi^2}\cdot\left(\sin\frac{4n\pi}{3}-\sin\frac{n\pi}{3}\right)\right).$$

Таким чином, ряд має вигляд:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{3}+b_n\sin\frac{n\pi x}{3},$$

де коефіцієнти ряду дивись вище.

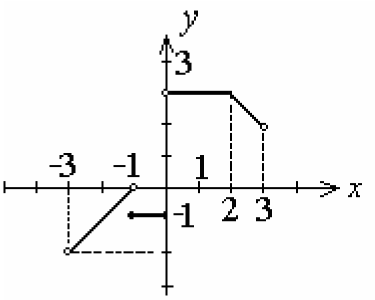
В граничних точках:

$$S(-2)=\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2},\ S(-1)=\frac{1-2}{2}=\frac{-1}{2},\ S(1)=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2},\ S(4)=\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2}.$$

Відповідь. $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{3}+b_n\sin\frac{n\pi x}{3}$, де коефіцієнти ряду

дивись вище, $S(-2)=S(4)=\frac{5}{2}$, $S(-1)=\frac{-1}{2}$, $S(1)=\frac{3}{2}$.

Приклад 11. Розвинути в ряд Фур'є функцію задану графічно



при умові, що $f(x+6)=f(x)$.

Розв'язування. Графік даної функції несиметричний ані відносно початку координат ані відносно осі $0Y$, тому функція загального типу із періодом $T=6=2l$, $l=3$.

Розвинення функції в ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{3}+b_n\sin\frac{\pi nx}{3}.$$

Задамо функцію $f(x)$ аналітично. Функція задається неоднозначно, але на кожному інтервалі є лінійною. На інтервалі $(-3;-1)$ графік функції – пряма, що сполучає точки $M_1(-3;-2)$ та $M_2(-1;0)$. Запишемо рівняння прямої M_1M_2 (через дві точки):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\quad\Rightarrow\quad\frac{x+3}{-1+3}=\frac{y+2}{0+2};$$

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{2}\quad\Rightarrow\quad x+3=y+2\quad\Rightarrow\quad y=x+1.$$

Отже, на інтервалі $(-3;-1)$ маємо $y=x+1$. На інтервалі $(-1;0)$ графік функції – пряма $y=-1$. На інтервалі $(0;2)$ графік функції – пряма

$y=3$. На інтервалі $(2;3)$ графік функції – пряма, що сполучає точки $K_1(2;3)$ та $K_2(3;2)$.Запишемо рівняння прямої K_1K_2 (через дві точки):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-2}{3-2}=\frac{y-3}{2-3} \ ;$$

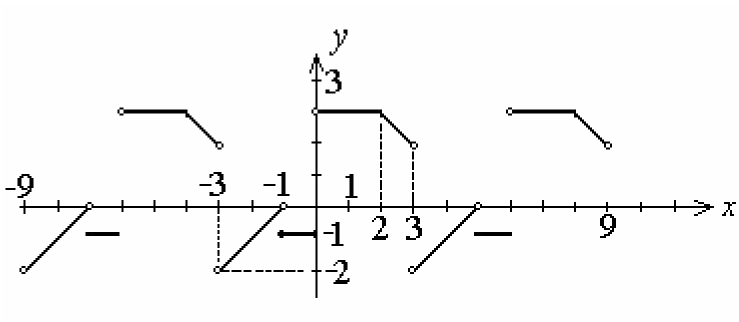
$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1} \quad \Rightarrow \quad x-2=-y+3 \quad \Rightarrow \quad y=5-x\,.$$

Отже, на інтервалі $(2;3)$ маємо $y=5-x$.

Таким чином, наша функція задається системою:

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\in(-3;-1), \\ -1, & x\in[-1;0], \\ 3, & x\in(0;2), \\ 5-x, & x\in[2;3). \end{cases}$$

Довжина основного періоду $T=6=2l$, отже, $l=3$. Враховуючи періодичність функції, маємо:



Ми вже з'ясували, що функція не є ані парною, ані непарною, отже, маємо повний ряд Фур'є:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{3}+b_n\sin\frac{n\pi x}{3}.$$

Обчислимо коефіцієнти ряду.

$$a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{-1}(x+1)dx+\int_{-1}^{0}-1dx+\int_{0}^{2}3dx+\int_{2}^{3}(5-x)dx\right].$$

Обчислимо всі інтеграли окремо.

$$I_1=\int_{-3}^{-1}(x+1)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-2}^{-1}=\frac{1-4}{2}+(-1+2)=\frac{-1}{2},$$

$$I_2=\int_{-1}^{0}-1\,dx=-x\Big|_{-1}^{0}=0-1=-1,$$

$$I_3=\int_{0}^{2}3\,dx=3x\Big|_{0}^{2}=6-0=6,$$

$$I_4=\int_{2}^{3}(5-x)dx=\left(5x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{2}^{3}=5(3-2)-\frac{9-4}{2}=5-\frac{5}{2}=\frac{5}{2}.$$

Таким чином, $a_0=\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}-1+6+\frac{5}{2}\right)=\frac{7}{3}$.

Тепер знайдемо коефіцієнт a_n.

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{-1}(x+1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx-\int_{-1}^{0}\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{0}^{2}3\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{2}^{3}(5-x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right].$$

Обчислимо інтеграли окремо.

$$I_1=\int_{-3}^{-1}(x+1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\left\{\begin{matrix} u=x+1 & du=1dx \\ dv=\cos\frac{n\pi x}{3}dx & v=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\end{matrix}\right\}=$$

$$=(x+1)\cdot\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{-3}^{-1}-\frac{3}{n\pi}\cdot\int_{-3}^{-1}\sin\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=\frac{3(x+1)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{-3}^{-1}-\frac{3}{n\pi}\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{-3}^{-1}=$$

$$=\frac{3}{n\pi}\cdot\left(0\cdot\sin\frac{-n\pi}{3}-(-2)\underbrace{\sin\frac{-3n\pi}{3}}_{0}\right)+\frac{9}{n^2\pi^2}\cdot\left(\cos\frac{-n\pi}{3}-\underbrace{\cos\frac{-3n\pi}{3}}_{(-1)^n}\right)=$$

$$=\frac{9}{n^2\pi^2}\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{3}-(-1)^n\right).$$

$$I_2=\int_{-1}^{0}\cos\frac{\pi nx}{3}dx=\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{3}{\pi n}\left(\underbrace{\sin 0}_{0}-\sin\frac{-\pi n}{3}\right)=\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{3},$$

$$I_3=\int\limits_0^2 3\cos\frac{\pi nx}{3}dx=3\cdot\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\bigg|_0^2=\frac{9}{\pi n}\left(\sin\frac{2\pi n}{3}-\underbrace{\sin 0}_{0}\right)=\frac{9}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3}\,,$$

$$I_3=\int\limits_2^3(5-x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\left\{\begin{matrix} u=5-x & du=-1dx \\ dv=\cos\frac{n\pi x}{3}dx & v=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\end{matrix}\right\}=$$

$$=(5-x)\cdot\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_2^3+\frac{3}{n\pi}\cdot\int\limits_2^3\sin\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=\frac{3(5-x)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_2^3+\frac{3}{n\pi}\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_2^3=$$

$$=\frac{3}{n\pi}\cdot\left(2\cdot\underbrace{\sin\frac{3n\pi}{3}}_{0}-3\sin\frac{2n\pi}{3}\right)-\frac{9}{n^2\pi^2}\cdot\left(\underbrace{\cos\frac{3n\pi}{3}}_{(-1)^n}-\cos\frac{2n\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{-9}{n\pi}\cdot\sin\frac{2n\pi}{3}-\frac{9}{n^2\pi^2}\cdot\left((-1)^n-\cos\frac{2n\pi}{3}\right).$$

Таким чином,

$$a_n=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{\pi n}\left(\sin\frac{\pi n}{3}+3\sin\frac{2\pi n}{3}-3\sin\frac{2\pi n}{3}\right)+\frac{9}{n^2\pi^2}\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{3}-(-1)^n-(-1)^n+\cos\frac{2n\pi}{3}\right)\right)$$

$$a_n=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{3}+\frac{9}{n^2\pi^2}\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{3}-(-1)^n-(-1)^n+\cos\frac{2n\pi}{3}\right)\right).$$

Тепер знайдемо коефіцієнт b_n.

$$b_n=\frac{1}{3}\int\limits_{-3}^3 f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\int\limits_{-3}^{-1}(x+1)\sin\frac{n\pi x}{3}dx-\int\limits_{-1}^0\sin\frac{n\pi x}{3}dx+\int\limits_0^2 3\sin\frac{n\pi x}{3}dx+\int\limits_2^3(5-x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right].$$

Обчислимо інтеграли окремо.

$$I_1=\int\limits_{-3}^{-1}(x+1)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\left\{\begin{matrix} u=x+1 & du=1dx \\ dv=\sin\frac{n\pi x}{3}dx & v=\frac{-3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\end{matrix}\right\}=$$

$$=-(x+1)\cdot\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-3}^{-1}+\frac{3}{n\pi}\cdot\int_{-3}^{-1}\cos\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=\frac{-3(x+1)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-3}^{-1}+\frac{3}{n\pi}\cdot\left(\frac{3}{n\pi}\right)\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-3}^{-1}=$$

$$=\frac{-3}{n\pi}\cdot\left(0\cdot\cos\frac{-n\pi}{3}-(-2)\underbrace{\cos\frac{-3n\pi}{3}}_{(-1)^n}\right)+\frac{9}{n^2\pi^2}\cdot\left(\sin\frac{-n\pi}{3}-\underbrace{\sin\frac{-3n\pi}{3}}_{0}\right)=$$

$$=\frac{-6(-1)^n}{n\pi}-\frac{9}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi}{3}.$$

$$I_2=\int_{-1}^{0}\sin\frac{\pi nx}{3}dx=\frac{-3}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3}\Big|_{-1}^{0}=\frac{-3}{\pi n}\left(\underbrace{\cos 0}_{1}-\cos\frac{-\pi n}{3}\right)=\frac{-3}{\pi n}\left(1-\cos\frac{\pi n}{3}\right),$$

$$I_3=\int_{0}^{2}3\sin\frac{\pi nx}{3}dx=3\cdot\frac{-3}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3}\Big|_{0}^{2}=\frac{-9}{\pi n}\left(\cos\frac{2\pi n}{3}-\underbrace{\cos 0}_{1}\right)=\frac{-9}{\pi n}\left(\cos\frac{2\pi n}{3}-1\right),$$

$$I_3=\int_{2}^{3}(5-x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\left\{\begin{matrix} u=5-x & du=-1dx \\ dv=\sin\frac{n\pi x}{3}dx & v=\frac{-3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\end{matrix}\right\}=$$

$$=(5-x)\cdot\frac{-3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_{2}^{3}-\frac{3}{n\pi}\cdot\int_{2}^{3}\cos\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=\frac{-3(5-x)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_{2}^{3}-\frac{3}{n\pi}\cdot\left(\frac{3}{n\pi}\right)\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_{2}^{3}=$$

$$=\frac{-3}{n\pi}\cdot\left(2\cdot\underbrace{\cos\frac{3n\pi}{3}}_{(-1)^n}-3\cos\frac{2n\pi}{3}\right)-\frac{9}{n^2\pi^2}\cdot\left(\underbrace{\sin\frac{3n\pi}{3}}_{0}-\sin\frac{2n\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{-3}{n\pi}\cdot\left(2(-1)^n-3\cos\frac{2n\pi}{3}\right)+\frac{9}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{2n\pi}{3}.$$

Таким чином,

$$b_n=\frac{1}{3}\left(\frac{-3}{\pi n}\left(2(-1)^n+1-\cos\frac{\pi n}{3}+3\cos\frac{2\pi n}{3}-1+2(-1)^n-3\cos\frac{2\pi n}{3}\right)+\frac{9}{n^2\pi^2}\cdot\left(-\sin\frac{n\pi}{3}+\sin\frac{2n\pi}{3}\right)\right)$$

$$b_n=\frac{1}{3}\left(\frac{-3}{\pi n}\left(4(-1)^n-\cos\frac{\pi n}{3}\right)+\frac{9}{n^2\pi^2}\cdot\left(-\sin\frac{n\pi}{3}+\sin\frac{2n\pi}{3}\right)\right).$$

Таким чином, ряд має вигляд: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{3}+b_n\sin\frac{n\pi x}{3}$, де коефіцієнти ряду дивись вище.

В граничних точках:

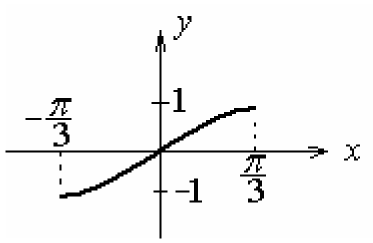
$$S(-3)=S(3)=\frac{2-2}{2}=0,\ S(-1)=\frac{0-1}{2}=\frac{-1}{2},$$

$$S(0)=\frac{-1+3}{2}=1,\ S(2)=\frac{3+3}{2}=3.$$

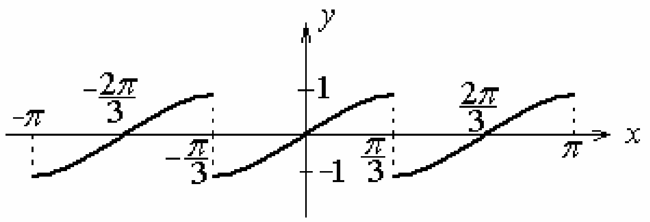
Відповідь. $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{3}+b_n\sin\frac{n\pi x}{3}$, де коефіцієнти ряду дивись вище, $S(-3)=S(3)=0$, $S(-1)=\frac{-1}{2}$, $S(0)=1$, $S(2)=3$.

Приклад 12. Розвинути функцію $f(x)=\sin 6x$ в ряд Фур'є на інтервалі $x\in\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$, при умові, що $f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=f(x)$.

Розв'язування. Побудуємо графік функції на вказаному інтервалі.



Функція має період $2l=\frac{2\pi}{3}$, отже, $l=\frac{\pi}{3}$.



Оскільки $f(-x)=\sin 6(-x)=-\sin 6x=-f(x)$ – функція непарна, тобто її розвинення в ряд Фур'є має вигляд $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{\pi/3}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin 3nx$.

Обчислимо коефіцієнти ряду.

$$b_n=\frac{2}{\pi/3}\int\limits_0^{\pi/3} y(x)\sin 3nx\,dx=\frac{6}{\pi}\int\limits_0^{\pi/3}\sin 6x\cdot\sin 3nx\,dx=$$

$$=\frac{6}{\pi}\int\limits_0^{\pi/3}\frac{1}{2}[\,\cos(6x-3nx)-\cos(6x-3nx)\,]dx=$$

$$=\frac{3}{\pi}\int\limits_0^{\pi/3}[\,\cos(3x(2-n))-\cos(3x(2+n))\,]dx=$$

$$=\frac{3}{\pi}\left[\;\frac{1}{3(2-n)}\sin(3x(2-n))\Big|_0^{\pi/3}-\frac{1}{3(2+n)}\sin(3x(2+n))\Big|_0^{\pi/3}\;\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2-n}\left(\sin\left(3\frac{\pi}{3}(2-n)\right)-\sin 0\right)-\frac{1}{2+n}\left(\sin\left(3\frac{\pi}{3}(2+n)\right)-\sin 0\right)\right]=0\,.$$

Отриманий результат справджується при всіх натуральних значеннях $n\neq 2$, оскільки при $n=2$ ми маємо нуль в знаменнику, то застосування відомої формули з таблиці інтегралів неможливо.

Окремо обчислимо коефіцієнт b_2:

$$b_2=\frac{3}{\pi}\int\limits_0^{\pi/3}\left[\;\underbrace{\cos 0}_{1}-\cos 12x\;\right]dx=\frac{3}{\pi}\left[\;x\,\Big|_0^{\pi/3}-\frac{1}{12}\sin 12x\Big|_0^{\pi/3}\;\right]=$$

$$=\frac{3}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{3}-0\right)-\frac{1}{12}\left(\sin\frac{12\pi}{3}-\sin 0\right)\right]=\frac{3}{\pi}\cdot\frac{\pi}{3}=1.$$

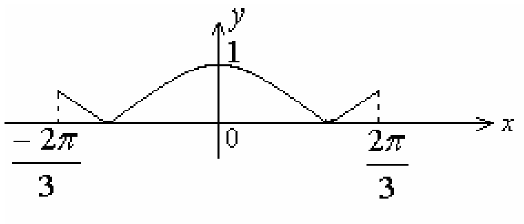
Таким чином, $f(x)=1\cdot\sin(2\cdot 3x)$, або $f(x)=\sin 6x$.

В граничних точках: $S\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=S\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0$.

Зауважимо, що отриманий результат є очікуваним, оскільки функція $f(x)$ співпадає з однією з функцій системи, за якою будується розвинення в ряд Фур’є. Не завжди функція, що містить тригонометрію, розвивається в ряд Фур’є з ефектом резонансу. Розглянемо наступний приклад.

Приклад 13. Розвинути функцію $f(x)=\cos^2 x$ в ряд Фур'є на інтервалі $x\in\left(\frac{-2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right)$, при умові, що $f\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=f(x)$.

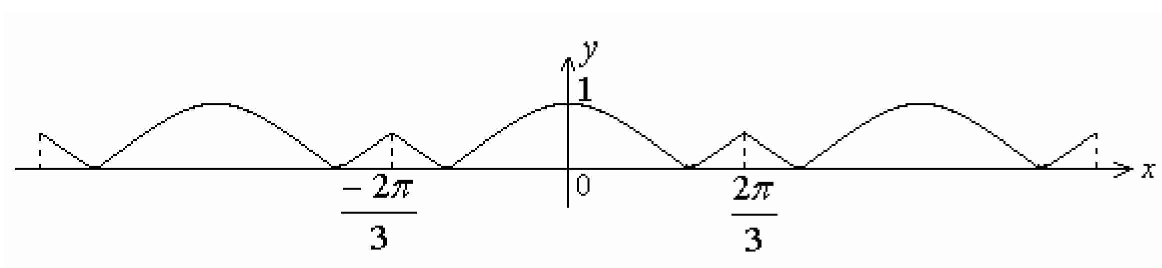
Розв'язування. Побудуємо графік функції на вказаному інтервалі.



Функція має період $2l=\frac{4\pi}{3}$, отже, $l=\frac{2\pi}{3}$. Графік функції має симетрію відносно осі ординат, таким чином функція є парною. Розвинення в ряд Фур'є буде мати такий вигляд:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{3n\pi x}{2\pi}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{3n\,x}{2}.$$

Продовжимо функцію на сусідні періоди. Отримаємо:



Обчислимо коефіцієнти ряду.

$$a_0=\frac{2}{2\pi/3}\int_0^{2\pi/3}f(x)\,dx=\frac{3}{\pi}\int_0^{2\pi/3}\cos^2 x\,dx=$$

$$=\frac{3}{\pi}\int_0^{2\pi/3}\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx=\frac{3}{2\pi}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi/3}=\frac{3}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sin\frac{4\pi}{3}}{2}\right)=$$

$$=\frac{3}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right)=\frac{3}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

$$a_n=\frac{2}{2\pi/3}\int_0^{2\pi/3}f(x)\cos\frac{3nx}{2}\,dx=\frac{3}{\pi}\int_0^{2\pi/3}\cos^2 x\cdot\cos\frac{3nx}{2}dx=$$

$$=\frac{3}{\pi}\int_0^{2\pi/3}\frac{1}{2}\left[\,1+\cos 2x\,\right]\cos\frac{3nx}{2}\,dx=$$

$$=\frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi/3}\left[\cos\frac{3nx}{2}+\cos 2x\cos\frac{3nx}{2}\right]dx=$$

$$=\frac{3}{2\pi}\left(\frac{2}{3n}\sin\frac{3nx}{2}\Bigg|_0^{2\pi/3}+\int_0^{2\pi/3}\frac{1}{2}\left(\cos\left(2x+\frac{3nx}{2}\right)+\cos\left(2x-\frac{3nx}{2}\right)\right)dx\right)=$$

$$=\frac{3}{2\pi}\left(\frac{2}{3n}\left(\underbrace{\sin\pi n}_{0}-\underbrace{\sin 0}_{0}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(2x+\frac{3nx}{2}\right)}{2+\frac{3n}{2}}+\frac{\sin\left(2x-\frac{3nx}{2}\right)}{2-\frac{3n}{2}}\right)\Bigg|_0^{2\pi/3}\right)=$$

$$=\frac{3}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{4+3n}{2}x\right)}{\frac{4+3n}{2}}+\frac{\sin\left(\frac{4-3n}{2}x\right)}{\frac{4-3n}{2}}\right)\Bigg|_0^{2\pi/3}\right)=$$

$$=\frac{3}{4\pi}\left[\frac{2}{4+3n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}(4+3n)\right)-\sin 0\right)+\frac{2}{4-3n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}(4-3n)\right)-\sin 0\right)\right]=$$

$$=\frac{3}{4\pi}\left[\frac{(-1)^n 2}{4+3n}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\frac{(-1)^n 2}{4-3n}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]=\frac{(-1)^n 6}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\left[\frac{1}{4+3n}+\frac{1}{4-3n}\right].$$

Отриманий результат справджується при всіх натуральних значеннях n, оскільки $4-3n=0$ при $n=\frac{4}{3}$.

Таким чином,

$$f(x)=\frac{3}{4\pi}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 6}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\left[\frac{1}{4+3n}+\frac{1}{4-3n}\right]\cos\frac{3n\,x}{2}.$$

В граничних точках: $S\left(\frac{-2\pi}{3}\right)=S\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}$.

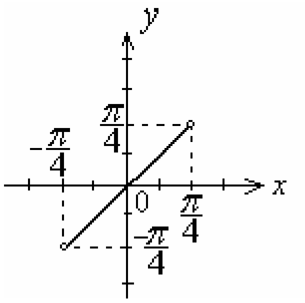
Відповідь.

$$f(x)=\frac{3}{4\pi}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 6}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\left[\frac{1}{4+3n}+\frac{1}{4-3n}\right]\cos\frac{3n\,x}{2},$$

$$S\left(\frac{-2\pi}{3}\right)=S\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}.$$

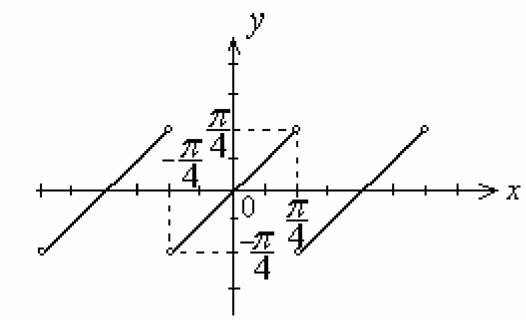
Приклад 14. Розвинути функцію $f(x)=x$ в ряд Фур'є на інтервалі $x\in\left(\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$, при умові, що $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f(x)$.

Розв'язування. Побудуємо графік функції на вказаному інтервалі.



Графік даної функції симетричний відносно осі $0Y$, тому функція непарна з періодом $T=\frac{2\pi}{4}=2l$, $l=\frac{\pi}{4}$.

Враховуючи періодичність функції, маємо:



Ряд Фур'є має вигляд: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos 4nx$.

Обчислимо коефіцієнти ряду.

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=\frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/4}x\,dx=\frac{8}{\pi}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\pi/4}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-0=\frac{\pi}{4}.$$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos 4nx dx=\frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/4}x\cos 4nx\,dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos 4nx\,dx & v=\frac{1}{4n}\sin 4nx \end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{8}{\pi}\left(x\cdot\frac{1}{4n}\sin 4nx\Bigg|_0^{\pi/4}-\frac{1}{4n}\int_0^{\pi/4}\sin 4nx\,dx\right)=$$

$$= \frac{8}{\pi}\left(\frac{x}{4n}\sin 4nx \bigg|_0^{\pi/4} - \frac{1}{4n}\cdot\left(-\frac{1}{4n}\right)\cdot\cos 4nx \bigg|_0^{\pi/4} \right) =$$

$$= \frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{4n}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\sin \pi n - 0\sin 0\right) + \frac{1}{16n^2}\cdot(\cos \pi n - \cos 0) \right) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{16n^2}\cdot\left((-1)^n - 1\right)\right).$$

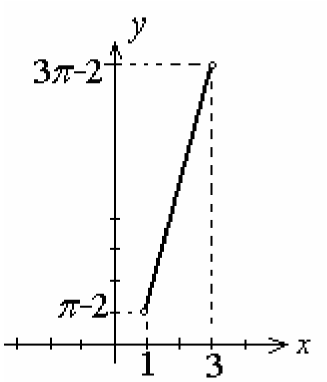
Таким чином, ряд має вигляд: $f(x) = \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{16n^2}\cdot\left((-1)^n - 1\right)\right)\cos 4nx$.

В граничних точках: $S\left(\frac{\pi}{4}\right) = S\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

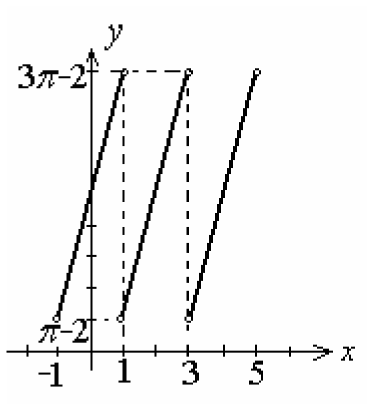
Відповідь. $f(x) = \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{16n^2}\cdot\left((-1)^n - 1\right)\right)\cos 4nx$, $S\left(\frac{\pi}{4}\right) = S\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Приклад 15. Розвинути функцію $f(x) = \pi x - 2$ в ряд Фур'є на інтервалі $x \in (1;3)$, при умові, що $f(x+2) = f(x)$.

Розв'язування. Побудуємо графік функції на вказаному інтервалі.



Враховуючи періодичність функції, маємо:



Графік даної функції несиметричний ані відносно початку координат, ані відносно осі $0Y$, тому функція загального типу із періодом $T = 2 = 2l$, $l = 1$.

Розвинення функції в ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{1}+b_n\sin\frac{\pi nx}{1},$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\pi nx+b_n\sin\pi nx.$$

Обчислимо коефіцієнти ряду.

$$a_0=\frac{1}{1}\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3(\pi x-2)dx=\left(\frac{\pi x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_1^3=\frac{\pi}{2}(9-1)-2(3-1)=4\pi-4.$$

Тепер знайдемо коефіцієнт a_n.

$$a_n=\frac{1}{1}\int_1^3 f(x)\cos\pi nx dx=\int_1^3(\pi x-2)\cos\pi nx dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=\pi x-2 & du=\pi\cdot dx \\ dv=\cos\pi nx\,dx & v=\frac{1}{\pi n}\sin\pi nx \end{matrix}\right\}=$$

$$=(\pi x-2)\cdot\frac{1}{\pi n}\sin\pi nx\Bigg|_1^3-\frac{\pi}{\pi n}\cdot\int_1^3\sin\pi nx\,dx=$$

$$=\frac{(\pi x-2)}{\pi n}\sin\pi nx\Bigg|_1^3-\frac{\pi}{\pi n}\cdot\left(-\frac{1}{\pi n}\right)\cdot\cos\pi nx\Bigg|_1^3=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\cdot\left((3\pi-2)\cdot\underbrace{\sin 3\pi n}_{0}-(\pi-2)\underbrace{\sin\pi n}_{0}\right)+\frac{\pi}{n^2\pi^2}\cdot\left(\underbrace{\cos 3\pi n}_{(-1)^n}-\underbrace{\cos\pi n}_{(-1)^n}\right)=0.$$

Тепер знайдемо коефіцієнт b_n.

$$b_n=\frac{1}{1}\int_1^3 f(x)\sin\pi nx dx=\int_1^3(\pi x-2)\sin\pi nx dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=\pi x-2 & du=\pi\cdot dx \\ dv=\sin\pi nx\,dx & v=\frac{-1}{\pi n}\cos\pi nx \end{matrix}\right\}=$$

$$=(\pi x-2)\cdot\frac{-1}{\pi n}\cos\pi nx\Bigg|_1^3+\frac{\pi}{\pi n}\cdot\int_1^3\cos\pi nx\,dx=$$

$$=\frac{-(\pi x-2)}{\pi n}\cos\pi nx\Bigg|_1^3+\frac{\pi}{\pi n}\cdot\left(\frac{1}{\pi n}\right)\cdot\sin\pi nx\Bigg|_1^3=$$

$$=\frac{-1}{\pi n}\cdot\left((3\pi-2)\cdot\underbrace{\cos 3\pi n}_{(-1)^n}-(\pi-2)\underbrace{\cos\pi n}_{(-1)^n}\right)+\frac{\pi}{n^2\pi^2}\cdot\left(\underbrace{\sin 3\pi n}_{0}-\underbrace{\sin\pi n}_{0}\right)=$$

$$=\frac{-(-1)^n}{\pi n}\cdot\left((3\pi-2)-(\pi-2)\right)=\frac{(-1)^{n+1}2\pi}{\pi n}.$$

Таким чином, ряд має вигляд: $f(x)=\frac{4\pi-4}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2\pi}{\pi n}\sin\pi nx$.

В граничних точках: $S(1)=S(3)=\frac{(3\pi-2)+(\pi-2)}{2}=2\pi-2$.

Відповідь. $f(x)=\frac{4\pi-4}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2\pi}{\pi n}\sin\pi nx$, $S(1)=S(3)=2\pi-2$.

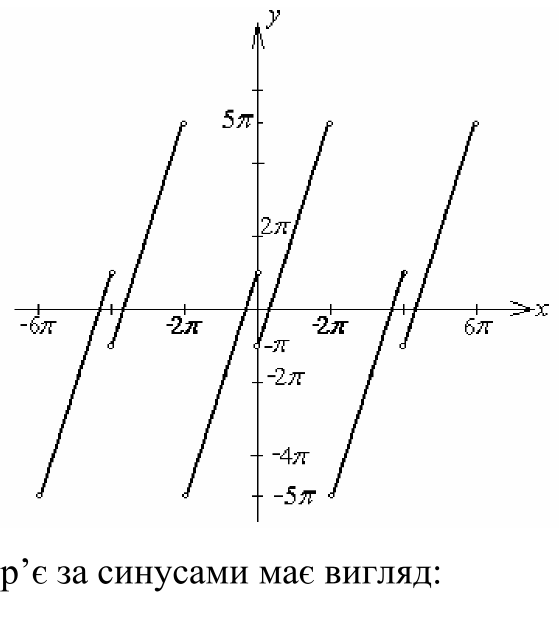
Приклад 16. Побудувати розвинення в ряд Фур'є функції $y=3x-\pi$, $x\in(0;2\pi)$

а) за синусами;

б) за косинусами;

в) повний ряд Фур'є.

Розв'язування. а) Функцію задано на проміжку $(0;2\pi)$, отже, $l=2\pi$.



Розвинення в ряд Фур'є за синусами має вигляд:

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{2\pi}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{nx}{2}.$$

Обчислимо коефіцієнти цього ряду.

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(x)\sin\frac{nx}{2}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(3x-\pi)\sin\frac{nx}{2}dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = 3x-\pi & du = 3dx \\ dv = \sin\frac{nx}{2}dx & v = -\frac{2}{n}\cos\frac{nx}{2}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left((3x-\pi)\cdot\left(-\frac{2}{n}\right)\cos\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi} - 3\left(-\frac{2}{n}\right)\int_0^{2\pi}\cos\frac{nx}{2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2}{n}\cdot(3x-\pi)\cos\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi} + \frac{6}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\sin\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2}{n}\cdot\left(5\pi\cdot\cos\frac{n\cdot 2\pi}{2} - (-\pi)\underbrace{\cos 0}_{1}\right) + \frac{12}{n^2}\cdot\left(\underbrace{\sin\frac{n\cdot 2\pi}{2}}_{0} - \underbrace{\sin 0}_{0}\right)\right) =$$

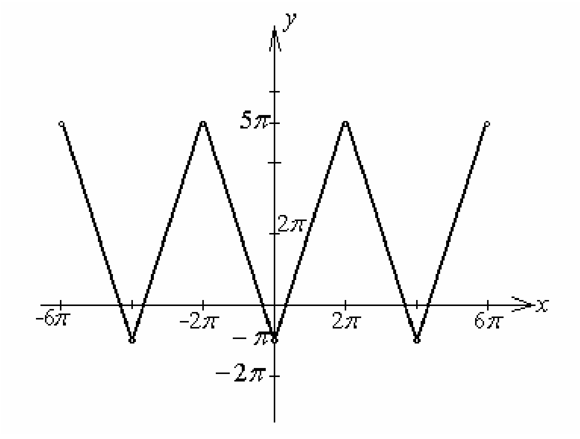
$$= -\frac{2}{\pi n}\cdot(5\pi\cdot\cos n\pi + \pi) = -\frac{2}{n}\cdot\left(5(-1)^n + 1\right) = \frac{2}{n}\cdot\left(5(-1)^{n+1} - 1\right).$$

Остаточно розвинення в ряд Фур'є за синусами має вигляд:

$$x - \pi = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot\left(5(-1)^{n+1}-1\right)}{n}\sin\frac{nx}{2},\ x\in(0;2\pi).$$

б) Розвинення функції в ряд Фур'є за косинусами має вид:

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\cos\frac{nx}{2}.$$



Обчислимо коефіцієнти ряду.

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}(3x-\pi)dx = \frac{1}{\pi}\left(3\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2\pi} - \pi x\Big|_0^{2\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \left(4\pi^2 - 4\pi^2\right) - \pi \cdot (2\pi - 0) \right) = \frac{1}{\pi}(-\pi) \cdot 2\pi = -2\pi .$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (3x - \pi) \cos \frac{nx}{2} dx = \left\{ \begin{matrix} u = 3x - \pi & du = 3dx \\ dv = \cos \frac{nx}{2} dx & v = \frac{2}{n} \sin \frac{nx}{2} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left((3x - \pi) \cdot \frac{2}{n} \sin \frac{nx}{2} \Big|_0^{2\pi} - \frac{2 \cdot 3}{n} \int_0^{2\pi} \sin \frac{nx}{2} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{n} \cdot (3x - \pi) \sin \frac{nx}{2} \Big|_0^{2\pi} - \frac{6}{n} \cdot \left(-\frac{2}{n} \right) \cdot \cos \frac{nx}{2} \Big|_0^{2\pi} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{n} \cdot \left(5\pi \underbrace{\sin \frac{n \cdot 2\pi}{2}}_{0} - (-\pi) \underbrace{\sin 0}_{0} \right) + \frac{12}{n^2} \left(\cos \frac{n \cdot 2\pi}{2} - \underbrace{\cos 0}_{1} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{12}{n^2} (\cos n\pi - 1) = \frac{12}{\pi n^2} \left((-1)^n - 1 \right).$$

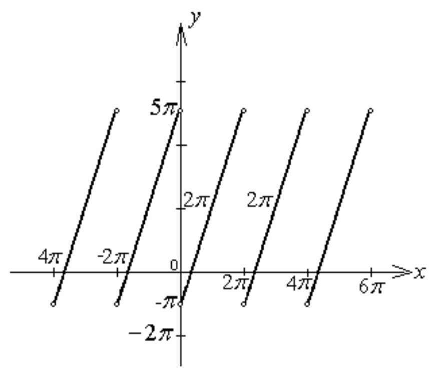
Таким чином, розвинення в ряд Фур'є за косинусами має вигляд:

$$y = -\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12 \cdot \left((-1)^n - 1 \right)}{\pi n^2} \cdot \cos \frac{nx}{2}, \; x \in (0; 2\pi).$$

в) Функцію задано на проміжку $(0; 2\pi)$, отже, $l = \pi$.

Розвинення функції в повний ряд Фур'є має вигляд:

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx .$$



Повний період дорівнює $T = 2\pi = 2l$, тому $l = \pi$. Оскільки обчислення коефіцієнтів ряду відбувається за схожими формулами (помінявся тільки період функції), то ми будемо «підглядати» у попередні пункти:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(3x-\pi)dx=\frac{1}{\pi}\left(3\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{2\pi}-\pi x\bigg|_0^{2\pi}\right)=-2\pi\,.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(3x-\pi)\cos nx\,dx=\left\{\begin{matrix} u=3x-\pi & du=3dx \\ dv=\cos nx\,dx & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left((3x-\pi)\cdot\frac{1}{n}\sin nx\bigg|_0^{2\pi}-\frac{3}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cdot(3x-\pi)\sin nx\bigg|_0^{2\pi}-\frac{3}{n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\cdot\cos nx\bigg|_0^{2\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cdot\left(5\pi\underbrace{\sin 2\pi n}_{0}-(-\pi)\underbrace{\sin 0}_{0}\right)+\frac{3}{n^2}\left(\underbrace{\cos 2\pi n}_{1}-\underbrace{\cos 0}_{1}\right)\right)=0\,.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(3x-\pi)\sin nx\,dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=3x-\pi & du=3dx \\ dv=\sin nx\,dx & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left((3x-\pi)\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\cos nx\bigg|_0^{2\pi}-3\left(-\frac{1}{n}\right)\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cdot(3x-\pi)\cos nx\bigg|_0^{2\pi}+\frac{3}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sin nx\bigg|_0^{2\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cdot\left(5\pi\cdot\underbrace{\cos 2\pi n}_{1}-(-\pi)\underbrace{\cos 0}_{1}\right)+\frac{3}{n^2}\cdot\left(\underbrace{\sin 2\pi n}_{0}-\underbrace{\sin 0}_{0}\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\cdot(5\pi+\pi)=\frac{-6}{n}\,.$$

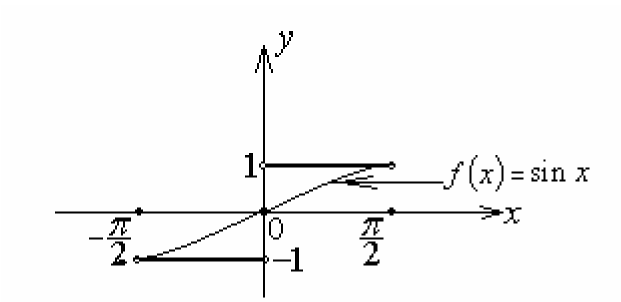
Таким чином, розвинення в ряд Фур’є за має вигляд:

$$f(x)=-\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-6}{n}\cdot\sin nx\,,\ x\in(0;2\pi).$$

Приклад 17. Побудувати розвинення в ряд Фур'є функції $f(x) = sign(\sin x)$ на інтервалі $x \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$, при умові $f(x+\pi) = f(x)$.

Розв'язування. Задамо функцію аналітично. Очевидно, що при $x \in \left(\frac{-\pi}{2}; 0 \right)$ синус від'ємний, тому маємо $f(x) = sign(\sin x) = -1$, а для $x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$ синус додатній, тому $f(x) = sign(\sin x) = 1$, отже,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \left(\frac{-\pi}{2}; 0 \right), \\ 1, & x \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right). \end{cases}$$



Графік даної функції симетричний відносно початку координат, тому функція непарна із періодом $T = \pi = 2l$, $l = \frac{\pi}{2}$. Зауважимо, що $a_0 = 0$, $a_n = 0$. Розвинення функції в ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{\pi/2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2nx .$$

Обчислимо потрібний коефіцієнт ряду.

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin 2nx \cdot dx = \frac{4}{\pi} \left(\int_{\pi/2}^{0} (-1) \cdot \sin 2nx \cdot dx + \int_0^{\pi/2} 1 \cdot \sin 2nx \cdot dx \right) =$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(-\frac{1}{2n} \cos 2nx \Big|_{\pi/2}^{0} + \frac{1}{2n} \cos 2nx \Big|_0^{\pi/2} \right) =$$

$$=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2n}\left(\underbrace{\cos\pi n}_{(-1)^n}-\underbrace{\cos 0}_{1}+\underbrace{\cos\pi n}_{(-1)^n}-\underbrace{\cos 0}_{1}\right)=\frac{4}{\pi n}\left((-1)^n-1\right).$$

Таким чином, розвинення в ряд Фур'є за має вигляд:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n}\left((-1)^n-1\right)\cdot\sin 2nx \text{ при } x\in\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$$

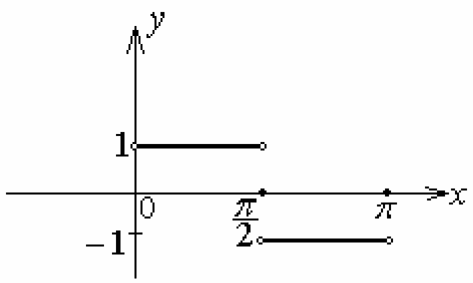
В граничних точках: $S\left(-\frac{\pi}{2}\right)=S\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-1+1}{2}=0$. В точці розриву маємо $S(0)=\frac{-1+1}{2}=0$.

Відповідь. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n}\left((-1)^n-1\right)\cdot\sin 2nx$, $S\left(-\frac{\pi}{2}\right)=S\left(\frac{\pi}{2}\right)=S(0)=0$.

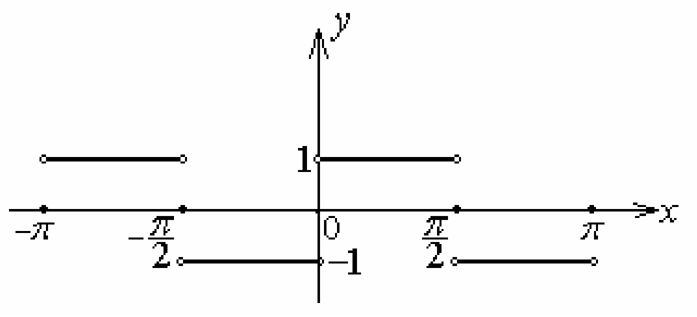
Приклад 18. Побудувати розвинення в ряд Фур'є за синусами та за косинусами функції $f(x)=sign(\cos x)$, $x\in(0;\pi)$.

Розв'язування. Задамо функцію аналітично. Очевидно, що при $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ косинус додатній, тому маємо $f(x)=sign(\cos x)=1$, а для $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ косинус від'ємний, тому $f(x)=sign(\cos x)=-1$, отже,

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right),\\ -1, & x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right).\end{cases}$$



а) При розвиненні за синусами потрібно графік функції відобразити симетрично початку координат, $T=2\pi=2l$, $l=\pi$.



Розвинення в ряд за синусами має вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\pi}=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx .$$

Обчислимо коефіцієнти цього ряду.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\cdot dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} 1\cdot\sin nx\cdot dx+\int_{\pi/2}^{\pi} -1\cdot\sin nx\cdot dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi/2}-\frac{-1}{n}\cos nx\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right)=$$

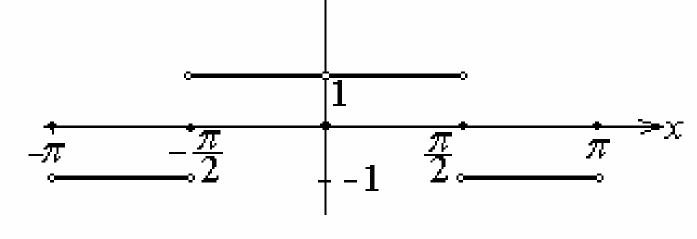
$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{-1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-\underbrace{\cos 0}_{1}+\underbrace{\cos\pi}_{-1}-\cos\frac{n\pi}{2}\right)=\frac{4}{\pi n}.$$

Тоді розвинення в ряд за синусами має вид $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n}\sin nx$, $x\in(0;\pi)$.

В граничних точках: $S(-\pi)=S(\pi)=\frac{-1+1}{2}=0$. В точці розриву маємо

$S(0)=S\left(-\frac{\pi}{2}\right)=S\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-1+1}{2}=0$.

б) При розвиненні за косинусами потрібно графік функції відобразити симетрично відносно осі $0Y$, при цьому також $T=2\pi=2l$, $l=\pi$.



Побудуємо ряд Фур'є за косинусами: $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$.

Обчислимо коефіцієнти цього ряду.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} 1dx + \int_{\pi/2}^{\pi} -1dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(x\Big|_0^{\pi/2} - x\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 0 - \pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx \cdot dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} 1 \cdot \cos nx \cdot dx + \int_{\pi/2}^{\pi} -1 \cdot \cos nx \cdot dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{n}\sin nx\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\left(\sin\frac{n\pi}{2} - \underbrace{\sin 0}_{0} - \underbrace{\sin\pi}_{0} + \sin\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Тоді розвинення в ряд за косинусами має вигляд: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2}\cos nx$.

В граничних точках: $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{-1-1}{2} = -1$. В точці розриву маємо:

$$S\left(-\frac{\pi}{2}\right) = S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1+1}{2} = 0,$$

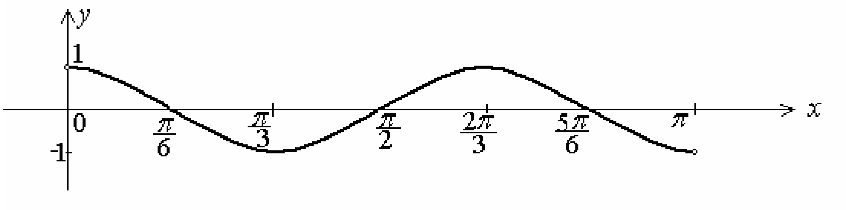
$$S(0) = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Відповідь. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2}\cos nx$,

$S(0) = 1$, $\left(-\frac{\pi}{2}\right) = S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $S(-\pi) = S(\pi) = -1$.

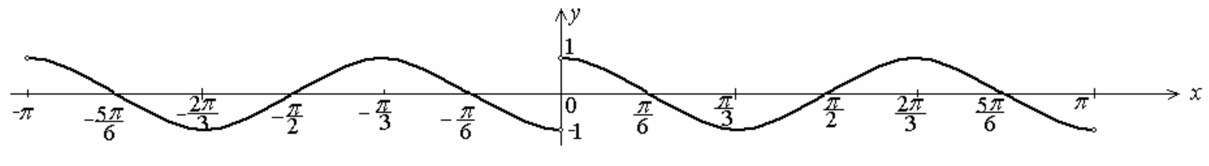
Приклад 19. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=\cos 3x$, $x\in(0;\pi)$, за синусами.

Розв'язування.



Оскільки функцію потрібно розвинути за синусами, то продовжимо її на симетричний інтервал непарним чином:

$$f(x)=\begin{cases}-\cos 3x, & x\in(-\pi;0),\\ \cos 3x, & x\in(0;\pi).\end{cases} \quad T=2\pi=2l,\ l=\pi .$$



$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\text{, } b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 3x\cdot\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\sin(nx-3x)+\sin(nx+3x))dx=\frac{-1}{\pi}\cdot\left(\frac{\cos(n-3)x}{n-3}+\frac{\cos(n+3)x}{n+3}\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{-1}{\pi}\cdot\left(\frac{\cos(n-3)\pi-\cos 0}{n-3}+\frac{\cos(n+3)\pi-\cos 0}{n+3}\right)=\frac{-1}{\pi}\cdot\left(\frac{(-1)^{n+1}-1}{n-3}+\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+3}\right)=$$

$$=\frac{1+(-1)^n}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{n-3}+\frac{1}{n+3}\right)=\frac{2n\left(1+(-1)^n\right)}{\pi\left(n^2-9\right)}\text{, при } n\neq 3 .$$

Обчислюємо тепер

$$b_3=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 3x\cdot\sin 3x\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 6x\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{-\cos 6x}{6}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{-1}{6\pi}\cdot(\cos 6\pi-\cos 0)=0 .$$

Таким чином, ряд має вигляд: $f(x)=\sum\limits_{\substack{n=1,\\ n\neq 3}}^{\infty}\frac{2n\left(1+(-1)^n\right)}{\pi\left(n^2-9\right)}\sin nx$.

В граничних точках:

$$S(0)=\frac{-1+1}{2}=0,\ S(-\pi)=S(\pi)=\frac{-1+1}{2}=0 .$$

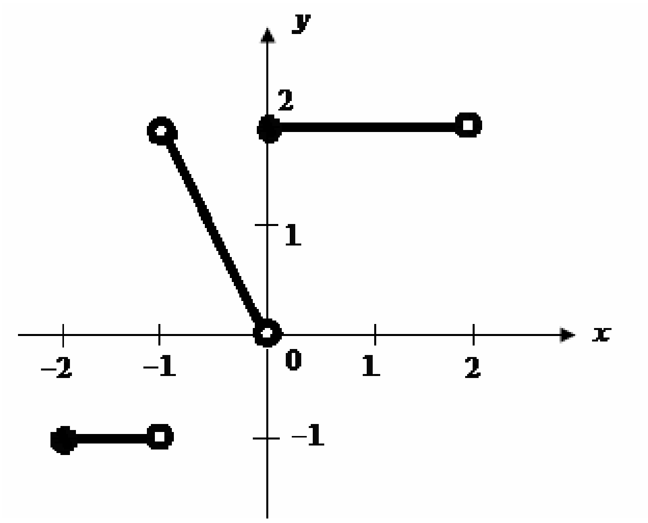
Відповідь. $f(x)=\sum\limits_{\substack{n=1,\\ n\neq 3}}^{\infty}\frac{2n\left(1+(-1)^n\right)}{\pi\left(n^2-9\right)}\sin nx$,

$$S(0)=0,\ S(-\pi)=S(\pi)=0 .$$

§ 7. Індивідуальні завдання

Варіант 1.

1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = x - 3$ на інтервалі $x \in (-\pi; \pi)$.
2. Розвинути функцію $f(x) = 2 - 3x$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x \in (0; 2)$.
3. Розвинути функцію $f(x) = 2x + \pi$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x \in (0; \pi)$.
4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-2\pi; 0), \\ x - \pi, & x \in (0; 2\pi]. \end{cases}$
5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2; 2)$ функцію $y = f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right), \\ -1, & x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right) \end{cases}$ в ряд Фур'є на інтервалі $(0; \pi)$.

Варіант 2.

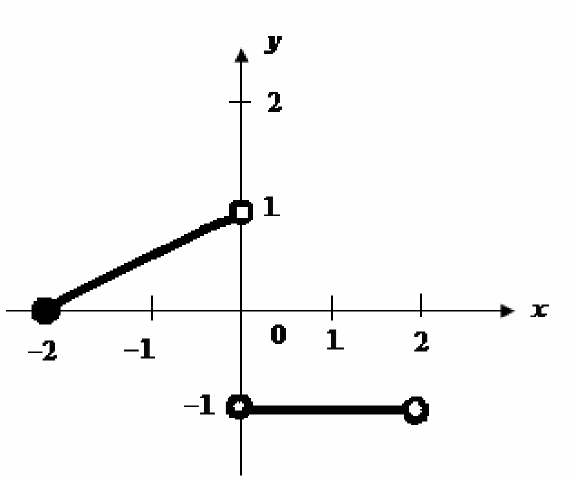
1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=2x-4$ на інтервалі $x\in(-\pi;\pi)$.

2. Розвинути функцію $f(x)=\dfrac{x}{3}+3$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x\in(0;3)$.

3. Розвинути функцію $f(x)=\pi-x$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x\in(0;\pi)$.

4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\begin{cases}2x+\pi, & x\in(-\pi;0),\\ -1, & x\in(0;\pi].\end{cases}$

5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2;2)$ функцію $y=f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x)=\begin{cases}-\cos 2x, & x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right),\\ 1, & x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)\end{cases}$ в ряд Фур'є за синусами на $(0;\pi)$.

Варіант 3.

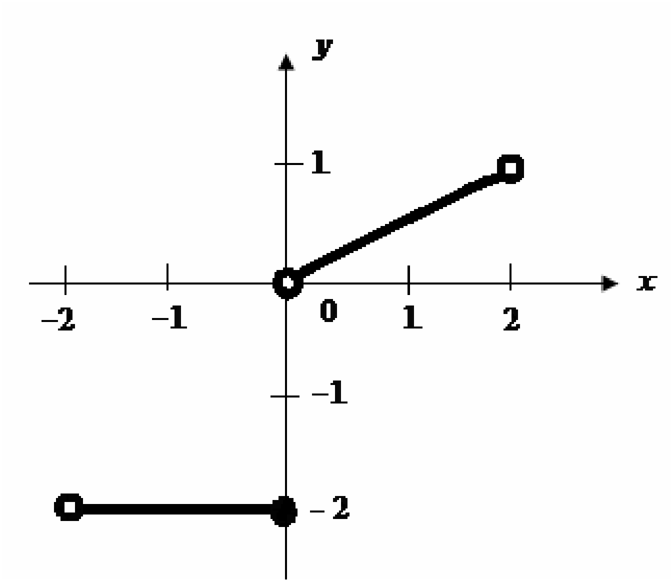
1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\frac{x}{2}+1$ на інтервалі $x\in(-\pi;\pi)$.

2. Розвинути функцію $f(x)=1-3x$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x\in(0;2)$.

3. Розвинути функцію $f(x)=|x|$ в ряд Фур'є на інтервалі $x\in(-2;2)$.

4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\begin{cases}-2, & x\in(-\pi;0), \\ 2x-\pi, & x\in(0;\pi].\end{cases}$

5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2;2)$ функцію $y=f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x)=\sin x$ в ряд Фур'є за косинусами на $(0;\pi)$.

Варіант 4.

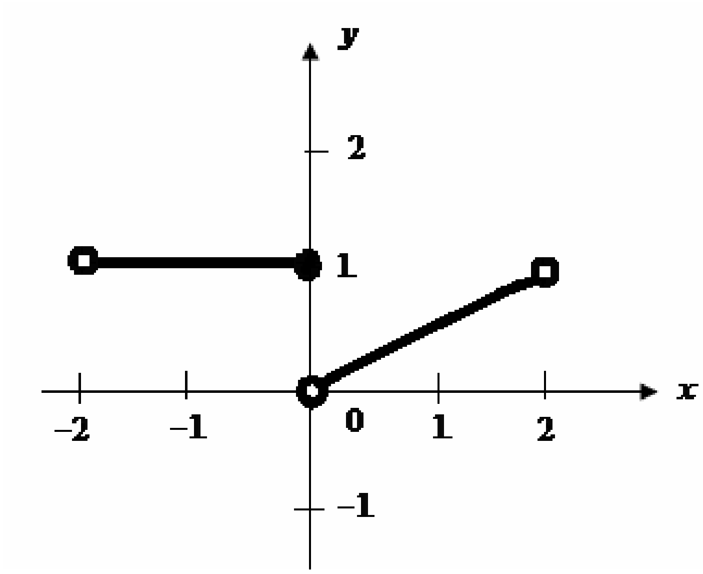
1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = 3x + 4$ на інтервалі $x \in (-\pi; \pi)$.

2. Розвинути функцію $f(x) = 2 - \dfrac{x}{2}$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x \in (0; 4)$.

3. Розвинути функцію $f(x) = x - \pi$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x \in (0; 2\pi)$.

4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x \in (-2; 0) \\ -2, & x \in (0; 2] \end{cases}$

5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2; 2)$ функцію $y = f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x) = \cos^2 x$ в ряд Фур'є за косинусами на $(0; \pi)$.

Варіант 5.

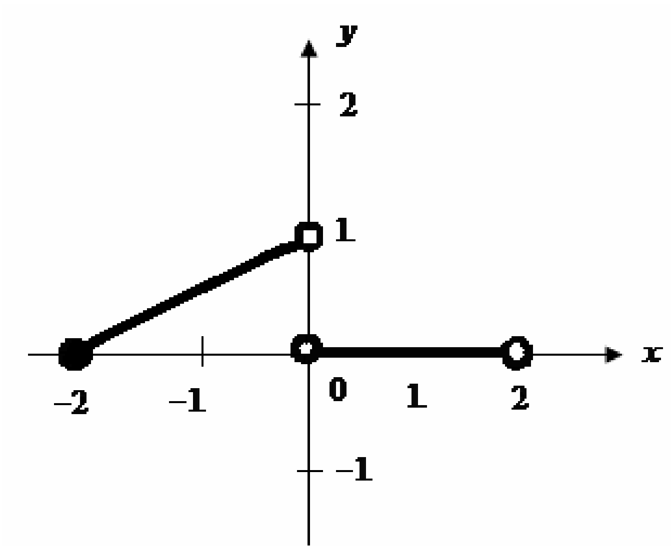
1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\frac{x}{2}-3$ на інтервалі $x\in(-\pi;\pi)$.

2. Розвинути функцію $f(x)=2x-1$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x\in(0;2)$.

3. Розвинути функцію $f(x)=\frac{\pi}{4}-x$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x\in(0;\pi)$.

4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\begin{cases}-1, & x\in[-3;-1),\\ 2x, & x\in(-1;3].\end{cases}$

5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2;2)$ функцію $y=f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x)=\sin 3x$ в ряд Фур'є на інтервалі на $(0;\pi)$.

Варіант 6.

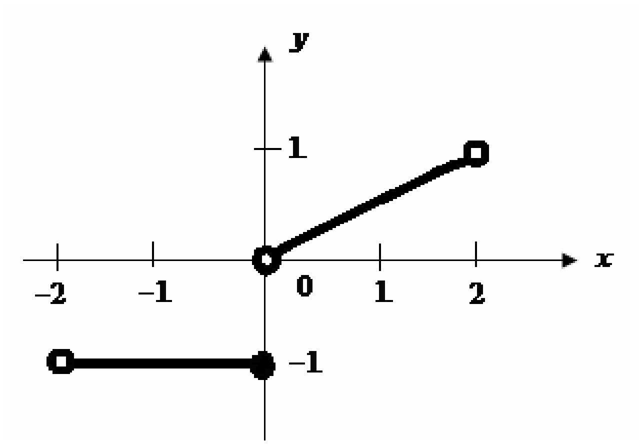
1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = 2x - 3$ на інтервалі $x \in (-\pi; \pi)$.

2. Розвинути функцію $f(x) = 1 - \frac{x}{2}$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x \in (0; 4)$.

3. Розвинути функцію $f(x) = x - 2$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x \in (0;3)$.

4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \in (-2; 1], \\ 1, & x \in (1; 2]. \end{cases}$

5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2;\, 2)$ функцію $y = f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x) = \begin{cases} -\cos 2x, & x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \\ 1, & x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \end{cases}$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $(0; \pi)$.

Варіант 7.

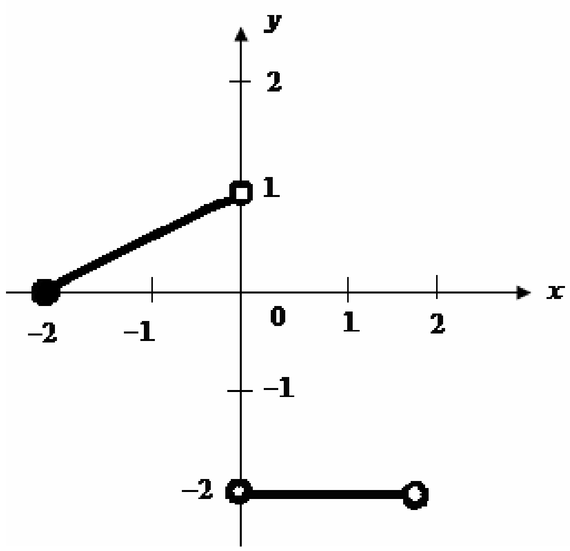
1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = x - 4$ на інтервалі $x \in (-\pi; \pi)$.

2. Розвинути функцію $f(x) = \dfrac{x}{3} + 1$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x \in (0; 3)$.

3. Розвинути функцію $f(x) = 2 - 2x$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x \in (0; 2)$.

4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \in (-2; 0), \\ 1, & x \in (0; 2]. \end{cases}$

5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2;\ 2)$ функцію $y = f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x) = \sin 3x$ в ряд Фур'є за синусами на $(0; \pi)$.

Варіант 8.

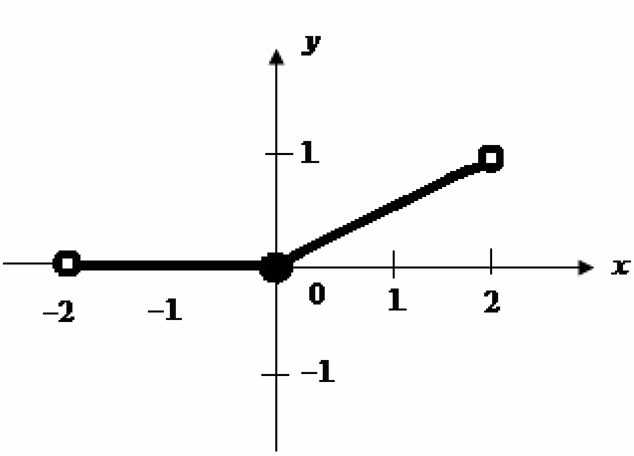
1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=3x-1$ на інтервалі $x\in(-\pi;\pi)$.

2. Розвинути функцію $f(x)=\frac{x}{2}+2$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x\in(0;2)$.

3. Розвинути функцію $f(x)=2-x$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x\in(0;3)$.

4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\in(-2;-1],\\ -2, & x\in(-1;2].\end{cases}$

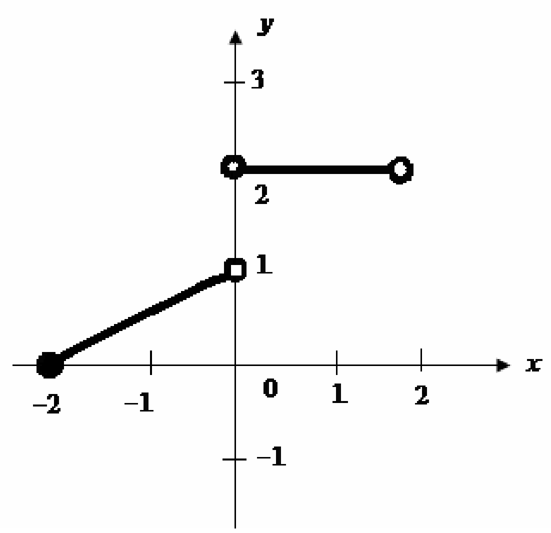
5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2;\,2)$ функцію $y=f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right),\\ 1, & x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)\end{cases}$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $(0;\pi)$.

Варіант 9.

1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = 3x - 2$ на інтервалі $x \in (-\pi; \pi)$.
2. Розвинути функцію $f(x) = 3 - x$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x \in (0; 2)$.
3. Розвинути функцію $f(x) = |x| + 2$ в ряд Фур'є на інтервалі $x \in (-1; 1)$.
4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = \begin{cases} -2, & x \in [-2; 0), \\ 2x, & x \in (0; 2). \end{cases}$
5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2; 2)$ функцію $y = f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = \cos^2 x$ на інтервалі $(0; \pi)$.

Варіант 10.

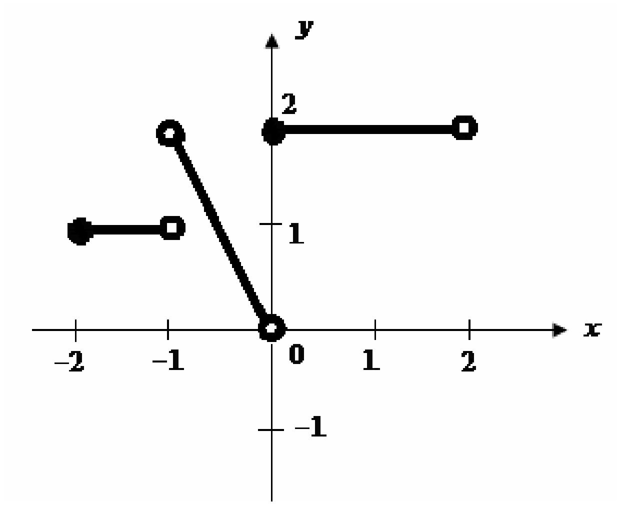
1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = 3x + 1$ на інтервалі $x \in (-\pi; \pi)$.

2. Розвинути функцію $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x \in (0; 4)$.

3. Розвинути функцію $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x \in (0; \pi)$.

4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (-3; 0) \\ 1, & x \in (0; 3] \end{cases}$

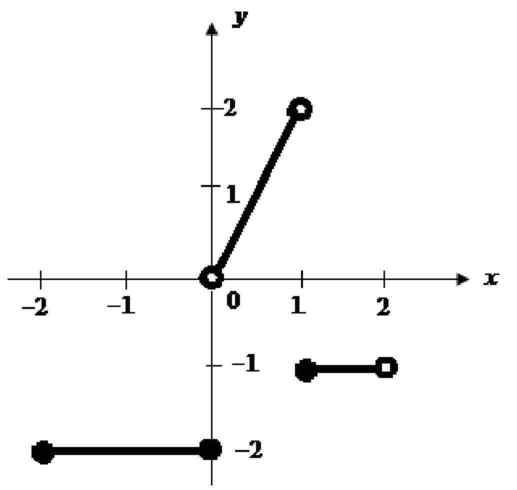
5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2;\, 2)$ функцію $y = f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x) = |\sin x|$ в ряд Фур'є інтервалі на $(-\pi; \pi)$.

Варіант 11.

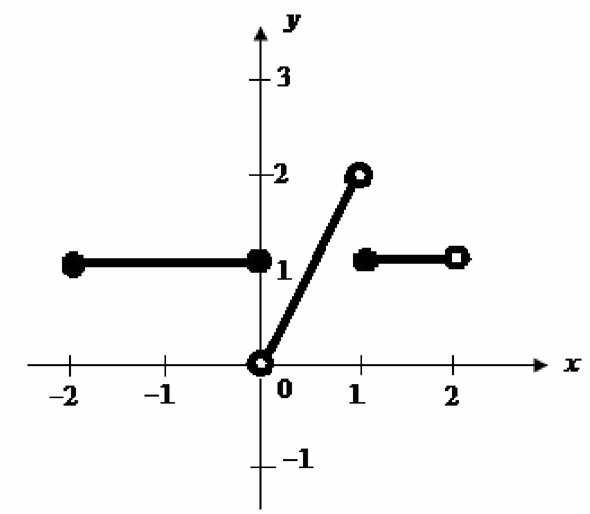
1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\frac{x}{2}-2$ на інтервалі $x\in(-\pi;\pi)$.
2. Розвинути функцію $f(x)=3x-2$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x\in(0;2)$.
3. Розвинути функцію $f(x)=\pi-2x$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x\in(0;\pi)$.
4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\in(-2;1],\\ 2, & x\in(1;2].\end{cases}$
5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2;2)$ функцію $y=f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x)=\sin^2 x$ в ряд Фур'є інтервал на $(0;\pi)$.

Варіант 12.

1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\frac{x}{2}+2$ на інтервалі $x\in(-\pi;\pi)$.
2. Розвинути функцію $f(x)=4-3x$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x\in(0;2)$.
3. Розвинути функцію $f(x)=1-|x|$ в ряд Фур'є на інтервалі $x\in(-2;2)$.
4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\begin{cases}-2, & x\in(-2;0)\\ 3x-1, & x\in[0;2).\end{cases}$
5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2;\,2)$ функцію $y=f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x)=\cos 2x$ в ряд Фур'є за косинусами на $(0;\pi)$.

Варіант 13.

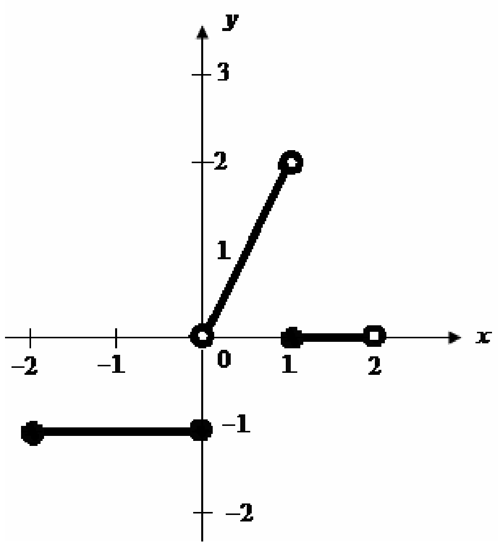
1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=3x+2$ на інтервалі $x\in(-\pi;\pi)$.

2. Розвинути функцію $f(x)=\dfrac{x}{2}+1$ в ряд Фур'є за синусами на $x\in(0;4)$.

3. Розвинути функцію $f(x)=1-2x$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x\in(0;2)$.

4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{\pi}{2}, & x\in(-\pi;0), \\ 2, & x\in(0;\pi]. \end{cases}$

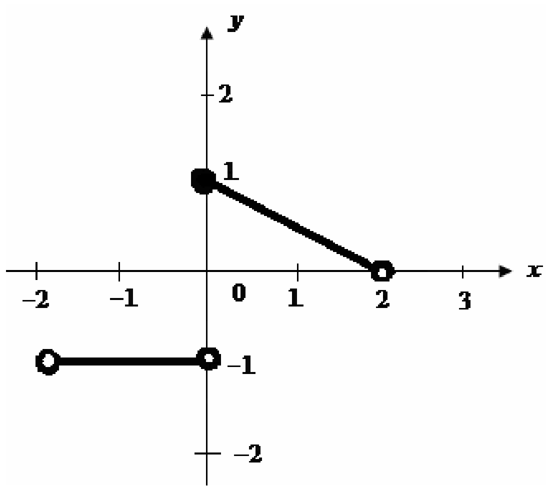
5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2;2)$ функцію $y=f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x)=\sin 2x$ в ряд Фур'є за косинусами на $(0;\pi)$.

Варіант 14.

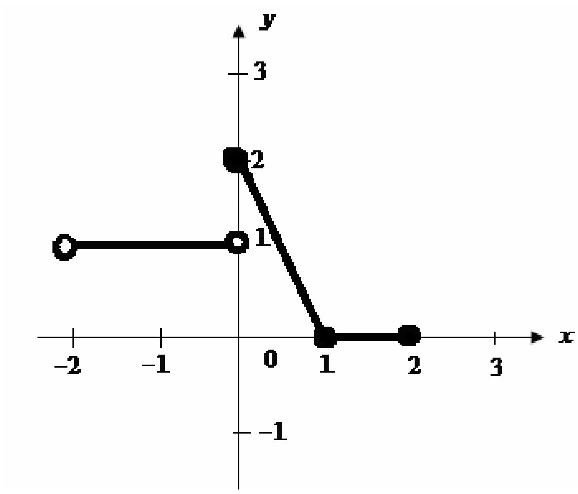
1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\frac{x}{2}-4$ на інтервалі $x\in(-\pi;\pi)$.
2. Розвинути функцію $f(x)=2-2x$ в ряд Фур'є за синусами на $x\in(0;2)$.
3. Розвинути функцію $f(x)=x+\frac{\pi}{4}$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x\in(0;\pi)$.
4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\begin{cases}2, & x\in(-2;-1),\\ 2x, & x\in(-1;2).\end{cases}$
5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2;2)$ функцію $y=f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right),\\ 1, & x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)\end{cases}$ на $(0;\pi)$.

Варіант 15.

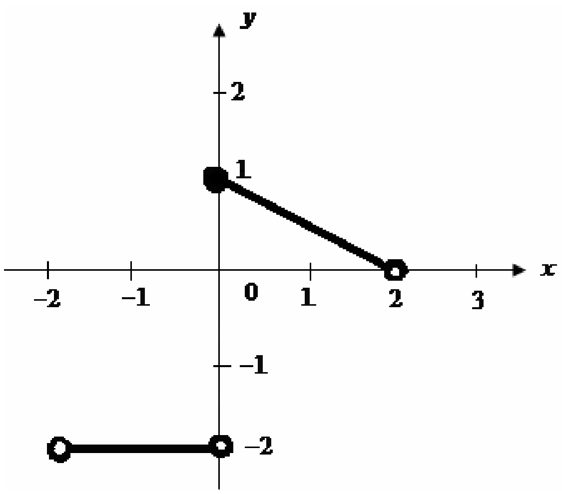
1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = 3x - 3$ на інтервалі $x \in (-\pi; \pi)$.
2. Розвинути функцію $f(x) = 2 - x$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x \in (0;3)$.
3. Розвинути функцію $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x \in (0; 2\pi)$.
4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (-1; 0), \\ 2, & x \in (0;1). \end{cases}$
5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2; 2)$ функцію $y = f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x) = \sin 3x$ в ряд Фур'є за косинусами на $(0; \pi)$.

Варіант 16.

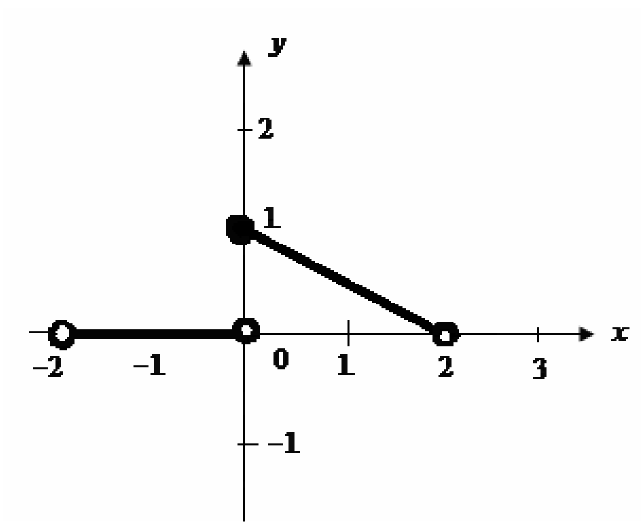
1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\frac{x}{2}+3$ на інтервалі $x\in(-\pi;\pi)$.
2. Розвинути функцію $f(x)=3x-1$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x\in(0;2)$.
3. Розвинути функцію $f(x)=\frac{\pi}{2}-2x$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.
4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\begin{cases}2x, & x\in(-2;1],\\ 3, & x\in(1;2).\end{cases}$
5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2;2)$ функцію $y=f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x)=\cos 2x$ в ряд Фур'є за синусами на $(0;\pi)$.

Варіант 17.

1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = x - 1$ на інтервалі $x \in (-\pi; \pi)$.
2. Розвинути функцію $f(x) = 1 - 2x$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x \in (0; 2)$.
3. Розвинути функцію $f(x) = \dfrac{x}{2} - 1$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x \in (0; 4)$.
4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-2; 1), \\ 3x + 1, & x \in (1; 2). \end{cases}$
5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2; 2)$ функцію $y = f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x) = \cos x$ в ряд Фур'є інтервалі на $(0; \pi)$.

Варіант 18.

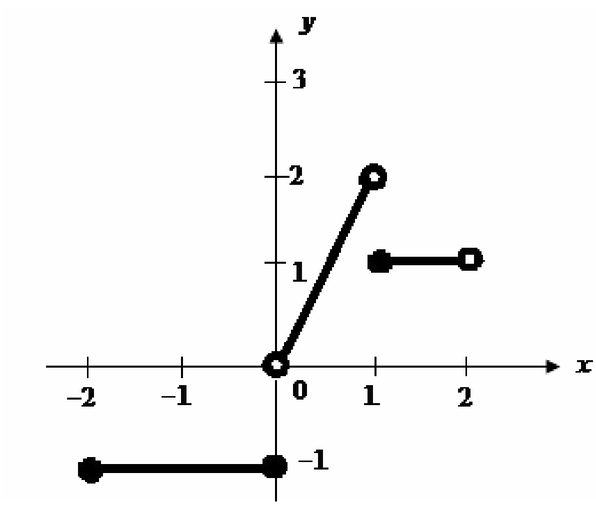
1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = x + 2$ на інтервалі $x \in (-\pi; \pi)$.

2. Розвинути функцію $f(x) = \dfrac{x}{3} - 2$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x \in (0;3)$.

3. Розвинути функцію $f(x) = 3 - x$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x \in (0;1)$.

4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = \begin{cases} 3, & x \in (-\pi; 0), \\ 2x - \pi, & x \in (0; \pi]. \end{cases}$

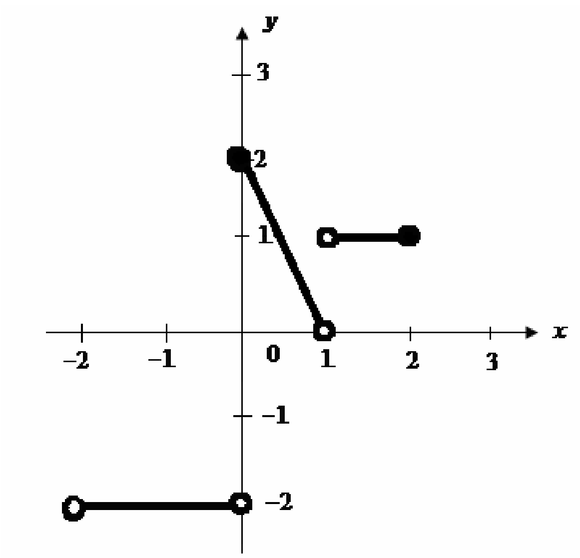
5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2;\, 2)$ функцію $y = f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x) = \begin{cases} -\cos 2x, & x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right), \\ 1, & x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right) \end{cases}$ в ряд Фур'є на $(0; \pi)$.

Варіант 19.

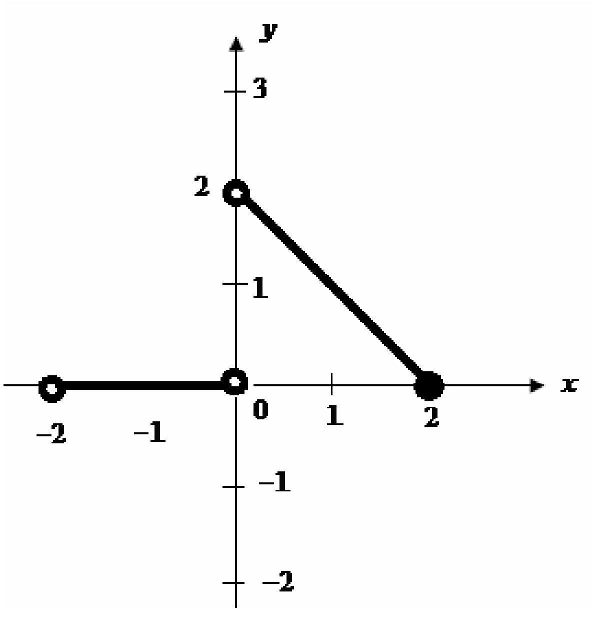
1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = 3x + 3$ на інтервалі $x \in (-\pi; \pi)$.
2. Розвинути функцію $f(x) = 2x - 1$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x \in (0; 2)$.
3. Розвинути функцію $f(x) = \dfrac{x}{3} + 3$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x \in (0; 3)$.
4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \in (-1; 0), \\ 1, & x \in (0; 1]. \end{cases}$
5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2; 2)$ функцію $y = f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x) = \cos x$ в ряд Фур'є за косинусами на $(0; \pi)$.

Варіант 20.

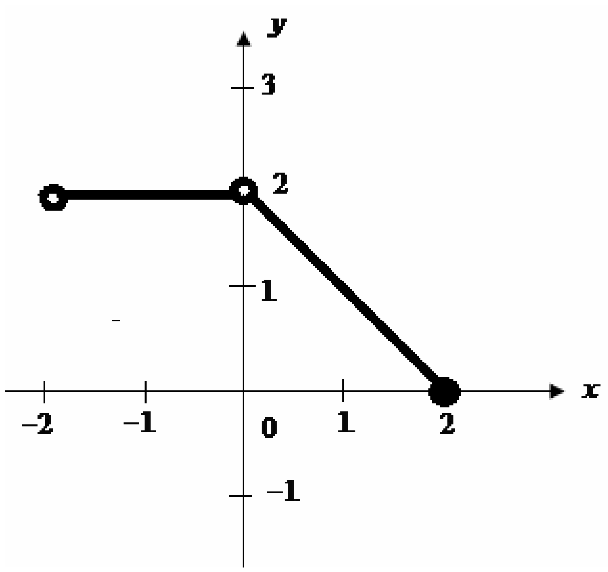
1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = 2x - 2$ на інтервалі $x \in (-\pi; \pi)$.
2. Розвинути функцію $f(x) = x - 4$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x \in (0; 2)$.
3. Розвинути функцію $f(x) = \dfrac{x}{2} + 2$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x \in (0; 2)$.
4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = \begin{cases} x + \pi, & x \in (-\pi; 0), \\ -2, & x \in (0; \pi]. \end{cases}$
5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2; 2)$ функцію $y = f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x) = \cos 3x$ в ряд Фур'є на інтервалі $(0; \pi)$.

Варіант 21.

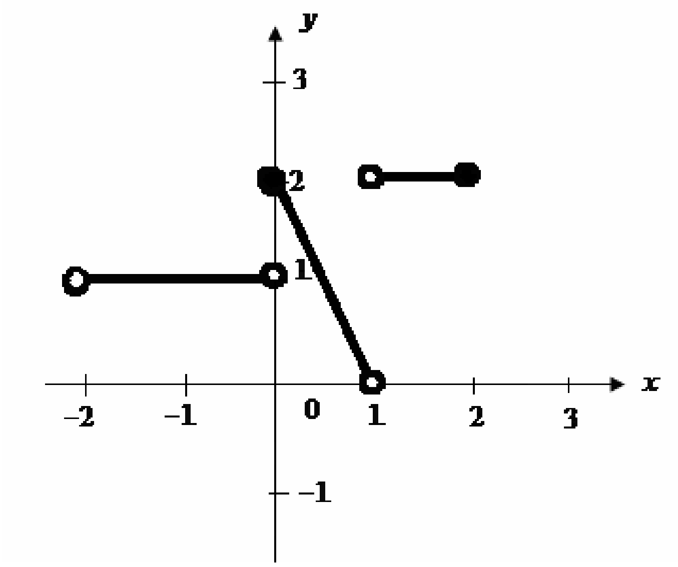
1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\frac{x}{2}+4$ на інтервалі $x\in(-\pi;\pi)$.
2. Розвинути функцію $f(x)=3x-4$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x\in(0;2)$.
3. Розвинути функцію $f(x)=1-2|x|$ в ряд Фур'є на інтервалі $x\in(-2;2)$.
4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\begin{cases}-3, & x\in(-3;0),\\ 2x, & x\in[0;3).\end{cases}$
5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2;\,2)$ функцію $y=f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x)=\sin 2x$ в ряд Фур'є за синусами на $(0;\pi)$.

Варіант 22.

1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = 3x - 4$ на інтервалі $x \in (-\pi; \pi)$.
2. Розвинути функцію $f(x) = x + 1$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x \in (0;3)$.
3. Розвинути функцію $f(x) = \dfrac{2\pi}{3} - 2x$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.
4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \in [-2; 0) \\ -3, & x \in (0; 2). \end{cases}$
5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2; 2)$ функцію $y = f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x) = \sin^2 x$ в ряд Фур'є за косинусами на $(0; \pi)$.

Варіант 23.

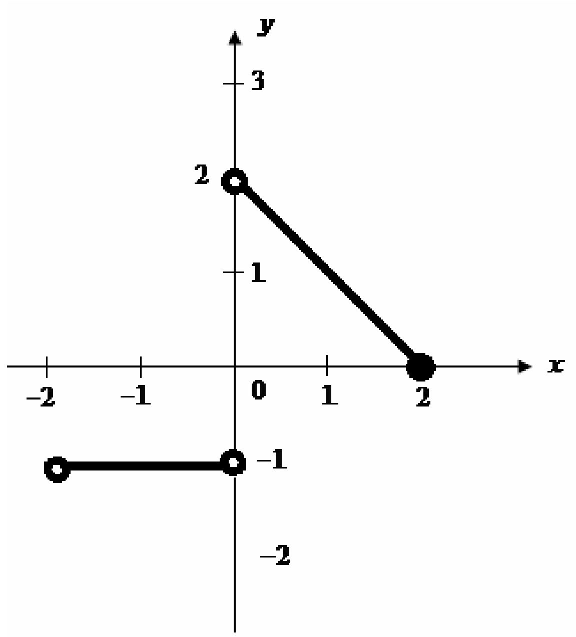
1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\frac{x}{2}-1$ на інтервалі $x\in(-\pi;\pi)$.

2. Розвинути функцію $f(x)=x-1$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x\in(0;2)$.

3. Розвинути функцію $f(x)=\frac{x}{3}-2$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x\in(0;3)$.

4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\begin{cases}2x+\pi, & x\in(-\pi;0),\\ 3, & x\in(0;\pi].\end{cases}$

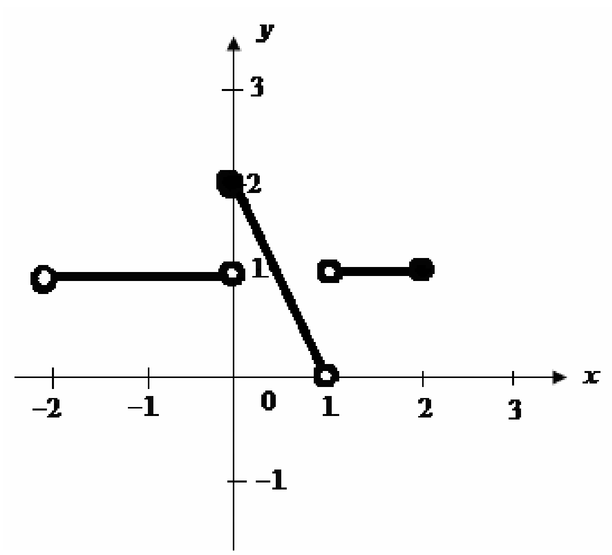
5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2;2)$ функцію $y=f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=|\sin 2x|$ на $(-\pi;\pi)$.

Варіант 24.

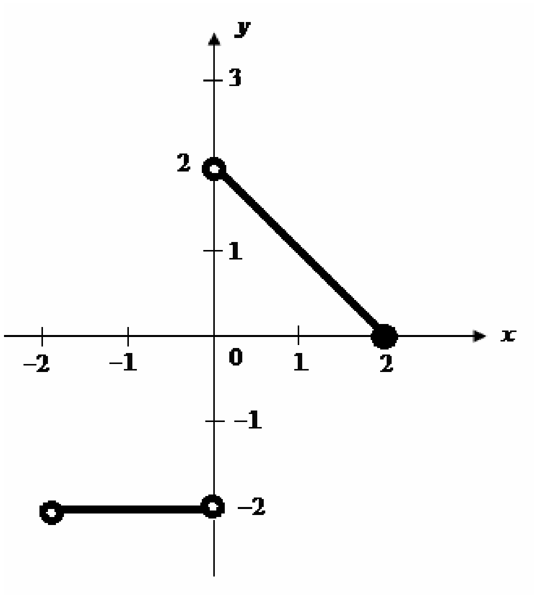
1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = 2x - 1$ на інтервалі $x \in (-\pi; \pi)$.
2. Розвинути функцію $f(x) = 1 - \frac{2x}{3}$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x \in (0;3)$.
3. Розвинути функцію $f(x) = x + \pi$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x \in (0; \pi)$.
4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1; 0], \\ 3x + 2, & x \in (0; 1]. \end{cases}$
5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2; 2)$ функцію $y = f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = \sin 2x$ на $(0; \pi)$.

Варіант 25.

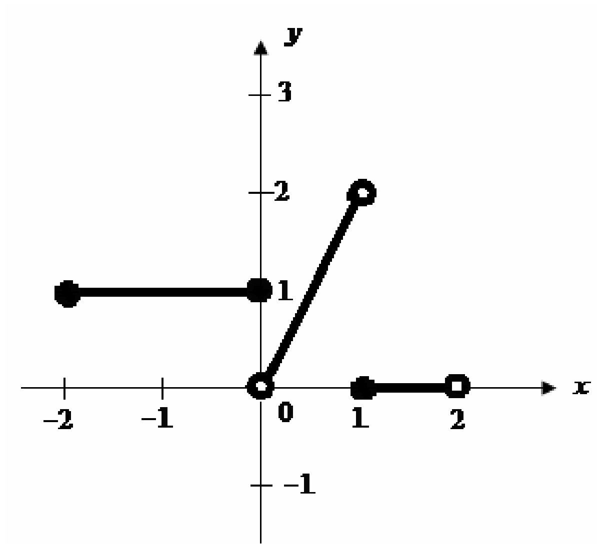
1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = x - 2$ на інтервалі $x \in (-\pi; \pi)$.
2. Розвинути функцію $f(x) = 2x + 3$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x \in (0; 2)$.
3. Розвинути функцію $f(x) = \dfrac{\pi}{3} - x$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x \in (0; \pi)$.
4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \in (-2; 1), \\ 2, & x \in (1; 2). \end{cases}$
5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2; 2)$ функцію $y = f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x) = \cos 3x$ в ряд Фур'є за синусами на $(0; \pi)$.

Варіант 26.

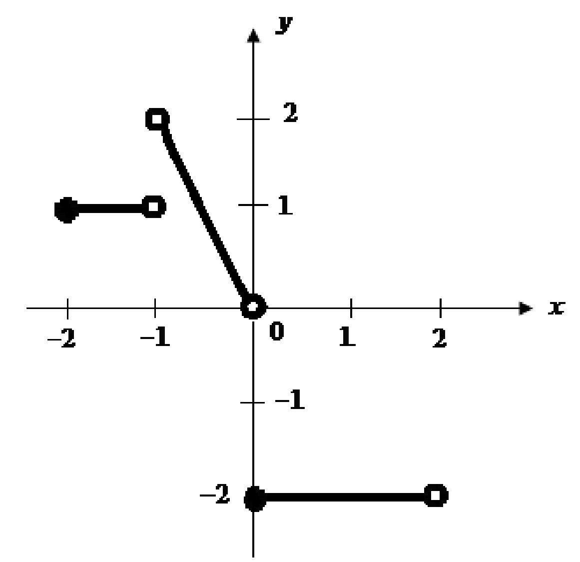
1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = 2x + 4$ на інтервалі $x \in (-\pi; \pi)$.
2. Розвинути функцію $f(x) = x + 2$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x \in (0; 2)$.
3. Розвинути функцію $f(x) = \frac{\pi}{3} - 2x$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x \in (-2; 0], \\ -3, & x \in (0; 2). \end{cases}$
5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2; 2)$ функцію $y = f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \\ -1, & x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \end{cases}$ в ряд Фур'є за косинусами на $(0; \pi)$.

Варіант 27.

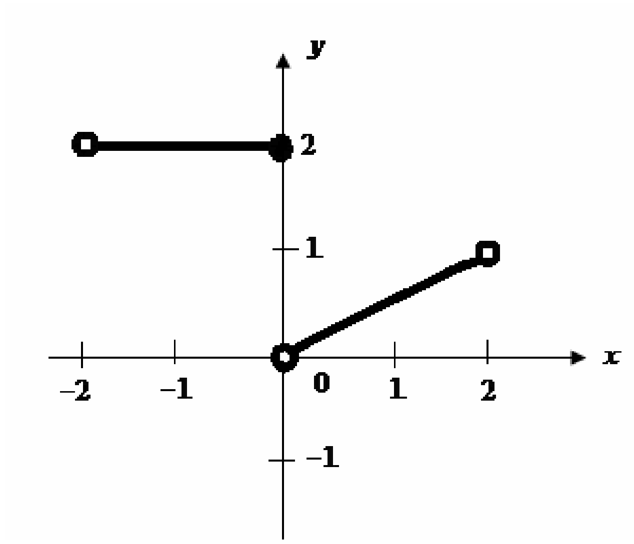
1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=2x+3$ на інтервалі $x\in(-\pi;\pi)$.
2. Розвинути функцію $f(x)=x$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x\in(0;3)$.
3. Розвинути функцію $f(x)=\frac{2\pi}{3}-2x$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x\in(0;\pi)$.
4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\begin{cases}2, & x\in(-\pi;0),\\ 3x-2\pi, & x\in(0;\pi).\end{cases}$
5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2;\,2)$ функцію $y=f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right),\\ 1, & x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)\end{cases}$ в ряд Фур'є за косинусами на $(0;\pi)$.

Варіант 28.

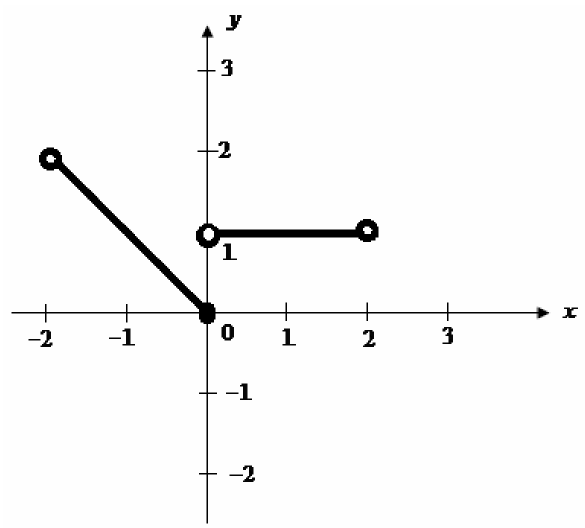
1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = 2x + 2$ на інтервалі $x \in (-\pi; \pi)$.
2. Розвинути функцію $f(x) = 3x + 2$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x \in (0; 1)$.
3. Розвинути функцію $f(x) = 1 - x$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x \in (0; 2)$.
4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = \begin{cases} -2, & x \in (-\pi; 0), \\ x - \dfrac{\pi}{2}, & x \in (0; \pi]. \end{cases}$
5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2; 2)$ функцію $y = f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x) = \cos x$ в ряд Фур'є за синусами на $(0; \pi)$.

Варіант 29.

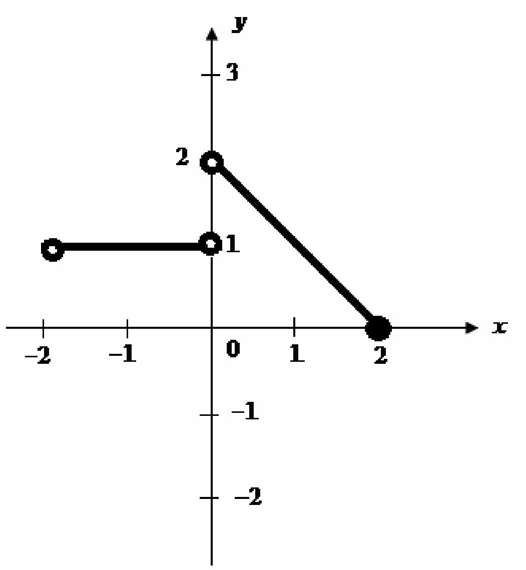
1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = x + 4$ на інтервалі $x \in (-\pi; \pi)$.
2. Розвинути функцію $f(x) = 2 - 3x$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x \in (0; 2)$.
3. Розвинути функцію $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x \in (0; 4)$.
4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\pi; 0), \\ 2x - \dfrac{\pi}{2}, & x \in (0; \pi]. \end{cases}$
5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2;\, 2)$ функцію $y = f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right), \\ 2, & x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right) \end{cases}$ в ряд Фур'є за синусами на $(0; \pi)$.

Варіант 30.

1. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = x + 3$ на інтервалі $x \in (-\pi; \pi)$.
2. Розвинути функцію $f(x) = 2x - 1$ в ряд Фур'є за синусами на інтервалі $x \in (0; 2)$.
3. Розвинути функцію $f(x) = \frac{x}{3} + 1$ в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $x \in (0; 3)$.
4. Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x) = \begin{cases} 3x + 2\pi, & x \in (-\pi; 0), \\ -2, & x \in (0; \pi). \end{cases}$
5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2; 2)$ функцію $y = f(x)$, задану графічно:



6. Розвинути функцію $f(x) = \cos^2 x$ в ряд Фур'є за синусами на $(0; \pi)$.

Додатки

Додаток 1. Основні формули

Період

$$T=2\pi;\quad x\in(-\pi;\pi) \qquad\qquad T=2l;\quad x\in(-l;\,l)$$

Парність

Загального вигляду $f(-x)\neq \pm f(x)$	$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+$ $+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx$	$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+$ $+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}$
	$a_0=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$	$a_0=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx$
	$a_n=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$	$a_n=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx$
	$b_n=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$	$b_n=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx$
Парна $f(-x)=f(x)$	$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$	$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}$
	$a_0=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx$	$a_0=\dfrac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)dx$
	$a_n=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$	$a_n=\dfrac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx$
Непарна $f(-x)=-f(x)$	$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$	$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}$
	$b_n=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$	$b_n=\dfrac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx$

Додаток 2. Основні теоретичні питання

1. Ряд Фурьє для 2π - періодичної функції. Формулювання теореми Діріхле про розвинення функції в ряд Фур'є.
2. Ряд Фурьє для $2l$ - періодичної функції. Формулювання теореми Діріхле про розвинення функції в ряд Фур'є.
3. Ряд Фурьє для парної 2π - періодичної функції.
4. Ряд Фурьє для непарної 2π - періодичної функції.
5. Ряд Фурьє для парної $2l$ - періодичної функції.
6. Ряд Фурьє для непарної $2l$ - періодичної функції.
7. Періодичне продовження неперіодичної функції, визначеної на скінченому проміжку.
8. Розвинення функції, заданої на інтервалі $(0;b)$ в ряд Фур'є за синусами.
9. Розвинення функції, заданої на інтервалі $(0;b)$ в ряд Фур'є за косинусами.
10. Достатня та необхідна умова розвинення функції в ряд Фур'є.

Література

1. ***Виноградов О.Л..*** Ряды Фур'є и приближение функций в курсе математического анализа. СПб.: Изд-во С.-Петерб. Ун-та, 2003, 60 с.
2. ***Зигмунд, А.*** Тригонометрические ряды [Текст]: в 2 т./ А. Зигмунд. М. : Мир, 1965. Т.1. _ М. : Мир, 1965. _ 616 с., Т.2. _ М. : Мир, 1965. _ 537 с.
3. ***Горячев А.П.*** Специальные главы функционального анализа. Числовые и функциональные ряды: Учебное пособие. М.: МИФИ, 2013.– 272 с.

1. ***Письменный Д.*** Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д. Письменный. – М.: Айрис-Пресс, 2007. – 608 с.
2. ***Герасимчук В.С.*** Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: навч. посіб. Ч.3. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля. Ряди. Прикладні задачі / В.С. Герасимчук, Г.С. Васильченко, В.І. Кравцов. – К.: Книги України ЛТД, 2009. – 400 с.
3. ***Дубовик В.П., Юрик І.І.*** Вища математика / Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.
4. Шмелев П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях. – М.: Высш. шк., 1983. – 174 с.

Зміст