МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.
ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ
ДО ТИПОВОЇ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ
для студентів технічних спеціальностей

Затверджено Методичною Радою НТУУ «КПІ»

Київ
НТУУ «КПІ»
2011

Інтегральне числення функцій однієї змінної. Звичайні диференціальні рівняння. Збірник завдань до типової розрахункової роботи : метод. посібник / Уклад. : Л. В. Барановська, В. В. Листопадова.. – К. : НТУУ «КПІ», 2011. – 110 с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ «КПІ»
(Протокол № 1 від 22.09.2011 р.)

Навчальне видання

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ

ДО ТИПОВОЇ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

для студентів технічних спеціальностей

Укладачі: *Барановська Леся Валеріївна,* канд. фіз.-мат. наук, доц.

Листопадова Валентина Вікторівна, канд. фіз.-мат. наук

Відповідальний

редактор *С.Д.Івасишен,* д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензент *Н.О.Вірченко,* д-р фіз.-мат. наук, проф

Вступ

На сьогоднішній день накопичено багаторічний досвід складання і використання типових індивідуальних робіт для студентів технічних спеціальностей. У результаті цього створено нову зручну для використання форму типового варіанта.

Запропонований збірник містить 30 варіантів індивідуальних завдань із таких тем: методи знаходження невизначених інтегралів, обчислення визначених інтегралів, обчислення та дослідження на збіжність невласних інтегралів, застосування інтегрального числення у геометрії та механіці, диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними, однорідні та лінійні диференціальні рівняння, диференціальні рівняння Бернуллі, диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку, лінійні однорідні та неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами.

Для виконання завдань варіанта розрахункової роботи укладачі рекомендують студентам ознайомитися з відповідними темами та прикладами розв’язування типових задач зі списку рекомендованої літератури.

1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Означення невизначеного інтеграла

Функція $F(x)$ називається ***первісною*** функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$, якщо для будь-кого $x \in (a;b)$ виконується рівність

$$F'(x) = f(x) \qquad (\text{або } dF(x) = f(x)dx).$$

Теорема 1. *Якщо функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на $(a;b)$, то множина всіх первісних для $f(x)$ задається формулою $F(x)+C$, де C – стала.*

Множина всіх первісних функцій $F(x)+C$ для $f(x)$ називається ***невизначеним інтегралом*** від функції $f(x)$ і позначається символом $\int f(x)dx$.

Таким чином, за означенням $\int f(x)dx = F(x)+C$.

Тут $f(x)$ називається підінтегральною функцією, $f(x)dx$ – підінтегральним виразом, x – змінною інтеграції, $\int$ – знак невизначеного інтеграла.

1.2. Властивості невизначеного інтеграла

Визначимо ряд властивостей невизначеного інтеграла, виходячи з його визначення.

1. Диференціал від невизначеного інтеграла, рівний підінтегральному виразу, а похідна невизначеного інтеграла рівна підінтегральній функції:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx, \qquad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Завдяки цій властивості *правильність інтеграції перевіряється диференціюванням*. Наприклад, рівність

$$\int (3x^2+4)dx = x^3+4x+C$$

правильна, оскільки $(x^3+4x+C)' = 3x^2+4$.

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції рівний сумі цієї функції і довільної сталої: $\int dF(x) = F(x)+C$.

3. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int af(x)dx = a\cdot\int f(x)dx, \quad a\neq 0 \text{ – стала.}$$

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченного числа неперервних функцій рівний алгебраїчній сумі інтегралів від складових функцій: $\int (f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

5. (Інваріантність формули інтеграції). Якщо $\int f(x)dx = F(x)+C$, то й $\int f(u)du = F(u)+C$, де $u=\varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int (2x^4-3x^2+x-5)dx$.

◄ $\int (2x^4-3x^2+x-5)dx = 2\int x^4dx - 3\int x^2dx +$

$+\int xdx - 5\int dx = 2\frac{x^5}{5}+C_1-3\frac{x^3}{3}+C_2+\frac{x^2}{2}+C_3-5x+C_4=$

$=\frac{2}{5}x^5-x^3+\frac{1}{2}x^2-5x+C$, де $C=C_1+C_2+C_3+C_4$.►

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int\frac{x+1}{x}dx$.

◄ $\int\frac{x+1}{x}dx=\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx = x+\ln|x|+C$.►

1.3. Таблиця основних невизначених інтегралів

Користуючись тим, що інтегрування – це дія, зворотна диференціюванню, можна отримати таблицю основних інтегралів.

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C, \quad n\neq -1$
2. $\int (x\pm a)^n dx = \frac{(x\pm a)^{n+1}}{n+1}+C, \quad n\neq -1$
3. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$

4. $\int \frac{1}{x \pm a} dx = \ln\left| \ x \pm a \ \right| + C$

5. $\int (a-x)^n dx = \frac{(a-x)^{n+1}}{-(n+1)} + C, \quad n \neq -1$

6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

7. $\int e^x dx = e^x \ + C$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

9. $\int \cos x dx = \sin x + C$

10. $\int tgx dx = -\ln\left| \ \cos x \ \right| + C$

11. $\int ctgx dx = \ln\left| \ \sin x \ \right| + C$

12. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

13. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

14. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$

15. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$

18. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arcctgx + C$

19. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C$

20. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$ – формула високого логарифма

21. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$ – формула довгого логарифма

23. $\int \frac{xdx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 \pm a^2\right| + C$

24. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

25. $\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$

26. $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$

27. $\int tg^2 xdx = tgx - x + C$

28. $\int ctg^2 xdx = -ctgx - x + C$

2. ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

2.1. Метод безпосереднього інтегрування

Метод інтегрування, при якому даний інтеграл шляхом тотожних перетворень підінтегральної функції (або виразу) і застосування властивостей невизначеного інтеграла зводиться до одного або декількох табличних інтегралів, називається ***безпосереднім інтегруванням.***

При зведенні даного інтеграла до табличного часто використовуються наступні перетворення диференціала (операція «приведення під знак диференціала»):

$du = d(u + a)$, a – число; $du = \frac{1}{a}d(au)$, $a \neq 0$ – число;

$u \cdot du = \frac{1}{2}d\left(u^2\right)$; $\cos udu = d(\sin u)$; $\sin udu = -d(\cos u)$;

$\frac{1}{u}du = d(\ln u)$; $\frac{1}{\cos^2 u} = d(tgu)$.

Приклади:

1) $\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C$ (формула 4 таблиці інтегралів);

2) $\int (3x-1)^{24} dx = \frac{1}{3}\int (3x-1)^{24} d(3x-1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-1)^{25}}{25} + C$ (формула 2);

3) $\int ctg^2 x dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx =$

$= \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int dx = -ctgx - x + C$ (формули 13 і 1);

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}\cdot x)}{\sqrt{(2)^2 - (\sqrt{3}\cdot x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot \arcsin\frac{\sqrt{3}\cdot x}{2} + C$ (формула 18);

5) $\int tgudu = \int \frac{\sin udu}{\cos u} = -\int \frac{d(\cos u)}{\cos u} = -\ln|\cos u| + C$ (виведення формули 10).

2.2. Метод інтегрування підстановкою (заміна змінної)

Інтегрування методом підстановки полягає у введенні нової змінної інтегрування (тобто підстановкою). При цьому заданий інтеграл приводиться до нового інтеграла, який є табличним або таким, що зводиться до нього (у разі «вдалої підстановки»). Загальних методів підбору підстановок не існує. Уміння правильно визначити підстановку отримується практикою.

Нехай потрібно обчислити інтеграл $\int f(x)dx$. Зробимо підстановку $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – функція, що має неперервну похідну.

Тоді $dx = \varphi'(t)dt$ і на підставі властивості інваріантності формули інтеграції невизначеного інтеграла отримуємо *формулу інтегрування підстановкою*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot \varphi'(t)dt \qquad (2.1)$$

Формула (2.1) також називається ***формулою заміни змінних*** у невизначеному інтегралі. Після знаходження інтеграла правої частини цієї рівності слід перейти від нової змінної інтегрування t назад до змінної x.

Іноді доцільно підбирати підстановку у вигляді $t=\varphi(x)$, тоді $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=\int f(t)dt$, де $t=\varphi(x)$. Іншими словами, формулу (2.1) можна застосовувати справа наліво.

Приклад 1. Знайти $\int e^{\frac{x}{4}}dx$.

◀ Покладемо $x=4t$, тоді $dx=4dt$.

Отже $\int e^{\frac{x}{4}}dx=4\int e^t dt=4e^t+C=4e^{\frac{x}{4}}+C$. ▶

Приклад 2. Знайти $\int x\cdot\sqrt{x-3}dx$.

◀ Нехай $\sqrt{x-3}=t$, тоді $\sqrt{x-3}=t$, $dx=2tdt$. Тому $\int x\cdot\sqrt{x-3}dx=\int\left(t^3+3\right)\cdot t\cdot 2tdt=$

$$=2\int\left(t^4+3t^2\right)dt=2\int t^4dt+6\int t^2dt=2\cdot\frac{t^5}{5}+6\cdot\frac{t^3}{3}+C==\frac{2}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}}+2(x-3)^{\frac{3}{2}}+C.$$ ▶

Приклад 3. Отримати формулу $\int\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|+C$.

◀ Позначимо $t=\sqrt{u^2+a^2}+u$ (підстановка Ейлера). Тоді

$dt=\frac{2u}{2\sqrt{u^2+a^2}}du+du$, тобто $dt=\frac{\sqrt{u^2+a^2}+u}{\sqrt{u^2+a^2}}du$.

Звідси $\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\frac{dt}{\sqrt{u^2+a^2}+u}=\frac{dt}{t}$.

Отже $\int\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|+C$. ▶

Приклад 4. Знайти $\int x\cdot(x+2)^{100}dx$.

◀ Нехай $x+2=t$. Тоді $x=t-2$, $dx=dt$. Маємо:

$$\int x\cdot(x+2)^{100}dx=\int(t-2)\cdot t^{100}dt=\int t^{101}dt-2\int t^{100}dt=$$

$$=\frac{t^{102}}{102}-2\cdot\frac{t^{102}}{101}+C=\frac{(x+2)^{102}}{102}-\frac{2(x+2)^{101}}{101}+C.$$ ▶

Приклад 5. Знайти $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

◀ Позначимо $e^x = t$. Тоді $x = \ln t$, $dt = \frac{dt}{t}$. Отже

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{t+1} = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{dt}{t^2+t} =$$

$$= \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = -\int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(t+\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{\frac{1}{2}+t+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t-\frac{1}{2}}\right| +$$

$$+ C = -\ln\left|\frac{t+1}{-t}\right| = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| = \ln\frac{e^x}{e^x+1} + C. \ ▶$$

2.3. Метод інтегрування частинами

Нехай $u = u(x)$ і $\upsilon = \upsilon(x)$ − функція, що має неперервні похідні. Тоді $d(u\upsilon) = u\cdot d\upsilon + \upsilon\cdot du$. Проінтегрувавши цю рівність, отримаємо

$$\int d(u\upsilon) = \int ud\upsilon + \int \upsilon du \quad \text{або} \quad \int ud\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon du$$

Отримана формула називається ***формулою інтегрування частинами***. Вона дає можливість звести обчислення інтеграла $\int ud\upsilon$ до обчислення інтеграла $\int \upsilon du$, який може виявитися істотно простішим за початковий.

Інтегрування частинами полягає в тому, що підінтегральний вираз заданого інтеграла представляється яким-небудь чином у вигляді добутку двох співмножників u і dv; потім, після знаходження v і du використовується формула інтегрування частинами. Іноді цю формулу потрібно використовувати кілька разів.

Вкажемо деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати методом інтегрування частинами.

1. Інтеграли вигляду $\int P(x)e^{kx}dx, \int P(x)\cdot\sin kxdx, \int P(x)\cos kxdx$, де $P(x)-$ многочлен, k – число. Зручно покласти $u = P(x)$, а за dv позначити решту співмножників.

2. Інтеграли вигляду $\int P(x)\arcsin xdx, \int P(x)\arccos xdx, \int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)arctgxdx, \int P(x)arcctgxdx$. Зручно покласти $P(x)dx = d\upsilon$, а за u позначити решту співмножників.

3. Інтеграли вигляду $\int e^{ax}\cdot\sin bxdx, \int e^{ax}\cdot\cos bxdx$, де a і b – числа. За u можна прийняти функцію $u = e^{ax}$.

Приклад 6. Знайти $\int(2x+1)e^{3x}dx$.

◄ Нехай $\begin{bmatrix} u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx \\ d\upsilon = e^{3x}dx \Rightarrow \upsilon = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix}$ (можна покласти $C = 0$). Отже, за формулою інтегрування частинами маємо

$$\int(2x+1)e^{3x}dx = (2x+1)\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int\frac{1}{3}e^{3x}2dx = = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C. \text{ ►}$$

Приклад 7. Знайти $\int\ln xdx$.

◄ Нехай $\begin{bmatrix} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ d\upsilon = dx \Rightarrow \upsilon = x \end{bmatrix}$.

Тому $\int\ln xdx = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\cdot\ln x - x + C$.►

Приклад 8. Знайти $\int x^2e^xdx$.

◄ Нехай $\begin{bmatrix} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ d\upsilon = e^xdx \Rightarrow \upsilon = e^x \end{bmatrix}$. Тому

$$\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2\int e^x\cdot xdx. \quad (2.2)$$

Для обчислення інтеграла $\int e^xxdx$ знову застосуємо метод інтегрування частинами: $u = x, d\upsilon = e^xdx \Rightarrow du = dx, \upsilon = e^x$. Значить

$$\int e^x\cdot xdx = x\cdot e^x - \int e^xdx = x\cdot e^x - e^x + C.$$

Тому (див. (2.2)) $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x \cdot e^x - e^x + C)$.►

Приклад 9. Знайти $\int arctgx dx$.

◄ Нехай $\left[\begin{array}{l} u = arctgx \Rightarrow d\upsilon = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ d\upsilon = dx \Rightarrow \upsilon = x \end{array}\right]$. Тому

$$\int arctgx dx = x \cdot arctgx - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x \cdot arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= xarctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.►$$

3. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

3.1. Поняття про раціональні функції

Функція вигляду

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \qquad (3.1)$$

де n — натуральне число, $a_i(i = 0,1,\ldots,n)$ — постійні коефіцієнти, називається ***многочленом*** (або ***цілою раціональною функцією***).

Число n називається ***степенем*** многочлена.

Коренем многочлена (3.1) називається таке значення x_0 (взагалі кажучи, комплексне) змінної x, при якому многочлен перетворюється в нуль, тобто $P_n(x_0) = 0$.

Теорема 3.1. *Якщо x_1 є коренем многочлена $P_n(x)$, то многочлен ділиться без остачі на $x - x_1$, тобто*

$$P_n(x) = (x - x_1) \cdot P_{n-1}(x) \qquad (3.2)$$

де $P_{n-1}(x)$ — многочлен степеня $(n-1)$.

Виникає питання: чи всякий многочлен має корінь? Позитивну відповідь на це питання дає наступне твердження.

Теорема 3.2. (основна теорема алгебри). *Всякий многочлен n-го степеня $(n > 0)$ має принаймні один корінь, дійсний або комплексний.*

Теорема 3.3. *Всякий многочлен* $P_n(x)$ *можна подати у вигляді*

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) \qquad (3.3)$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *— корені многочлена,* a_0 *— коефіцієнт многочлена при* x^n.

Приклад 1. Розкласти многочлен $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ на множники.

◄ Многочлен $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ перетворюється в нуль при $x = -1, x = 1, x = 2$. Отже, $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2)$. ►

Якщо в розкладанні многочлена (3.3) який-небудь корінь зустрівся k раз, то він називається ***коренем кратності*** k. У випадку $k = 1$ (тобто корінь зустрівся один раз) корінь називається ***простим.***

Розкладання многочлена (3.3) можна записати у вигляді

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_r)^{k_r}, \qquad (3.4)$$

якщо корінь x_1 має кратність k_1, корінь x_2 – кратність k_2 і так далі.

При цьому $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$, а r – число різних коренів.

Наприклад, розкладання

$$P_8(x) = (x-3)(x+1)(x-4)(x-3)(x-3)x(x-4)(x-3)$$

можна записати так:

$$P_8(x) = (x-3)^4 \cdot (x+1) \cdot (x-4)^2 \cdot x.$$

Теорема 3.7. *Всякий многочлен з дійсними коефіцієнтами розкладається на лінійні і квадратні множники з дійсними коефіцієнтами, тобто многочлен* $P_n(x)$ *можна подати у вигляді*

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_r)^{k_r}\left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{s_1} \ldots \left(x^2 + p_m x + q_m\right)^{s_m}. \qquad (3.5)$$

Дробово-раціональною функцією (або ***раціональним дробом***) називається функція, рівна відношенню двох многочленів, тобто $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, де $P_m(x)$ − многочлен степеня m, а $Q_n(x)$ − многочлен степеня n.

Раціональний дріб називається ***правильним***, якщо степінь чисельника менше степеня знаменника, тобто $m < n$; в протилежному випадку (якщо $m \geq n$) раціональний дріб називається ***неправильним***.

Всякий неправильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можна, шляхом ділення чисельника на знаменник, подати у вигляді суми многочлена $L(x)$ і правильного раціонального дробу $\frac{R(x)}{Q(x)}$, тобто $\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$.

Наприклад, $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2}$ – неправильний раціональний дріб.

Розділимо чисельник на знаменник в стовпчик:

$$\begin{array}{l}
_\ x^4 \qquad\qquad -5x+9 \mid \underline{x-2} \\
\quad \underline{x^4-2x^3} \qquad\qquad\quad \mid x^3+2x^2+4x+3 \\
\quad\ _\ 2x^3 \qquad -5x+9 \\
\qquad \underline{2x^3-4x^2} \\
\qquad\qquad _\ 4x^2-5x+9 \\
\qquad\qquad\quad \underline{4x^2-8x} \\
\qquad\qquad\qquad\quad _\ 3x+9 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{3x-6} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 15.
\end{array}$$

Отримаємо частку $L(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ і залишок $R(x) = 15$. Отже,

$$\frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = x^3 + 2x^2 + 4x + 3 + \frac{15}{x - 2}.$$

Правильні раціональні дроби вигляду

(I). $\frac{A}{x - a}$;

(II). $\frac{A}{(x - a)^k} \left(k \geq 2, k \in N\right)$;

(III). $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ (корені знаменника комплексні, тобто $p^2-4q<0$);

(IV). $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ ($k\ge 2$, корені знаменника комплексні) , де

$A, a, M, N, p, q-$ дійсні числа,

називаються ***елементарними раціональними дробами I, II, III і IV типів.***

Теорема 3.8. *Будь-який правильний раціональний дріб* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$*, знаменник якого розкладений на множники*

$$Q(x)=\left(x-x_1\right)^{k_1}\cdot\left(x-x_2\right)^{k_2}\ldots\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{s_1}\ldots\ \ldots\left(x^2+p_mx+q_m\right)^{s_m},$$

можна подати у вигляді наступної суми елементарних дробів:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{\left(x-x_1\right)^2}+\cdots+\frac{A_{k_1}}{\left(x-x_1\right)^{k_1}}+$$

$$+\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{\left(x-x_2\right)^2}+\cdots+\frac{B_{k_2}}{\left(x-x_2\right)^{k_2}}+\cdots+$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{C_2x+D_2}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}+\cdots+\frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{s_1}}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_mx+q_m}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+p_mx+q_m\right)^2}+\cdots+\frac{M_{s_m}x+N_{s_m}}{\left(x^2+p_mx+q_m\right)^{s_m}}, \qquad (3.6)$$

де $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, C_1, D_1, \ldots, M_1, N_1, \ldots$ *– деякі дійсні коефіцієнти.*

Пояснимо формулювання теореми на наступних прикладах:

1) $\dfrac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^3}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{(x-3)^2}+\dfrac{D}{(x-3)^3}$;

2) $\dfrac{x^3+1}{x^2\left(x^2+1\right)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$;

3) $\dfrac{7x^2+8x+9}{(x-1)(x-2)\left(x^2+x+1\right)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}++\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+x+1\right)^2}$.

Приклад 3. Подати дріб $\dfrac{2x^2-3x-3}{(x-1)\left(x^2-2x+5\right)}$ у вигляді суми елементарних дробів.

◄ За теоремою 3.8 маємо:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)\left(x^2-2x+5\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B_x+C}{x^2-2x+5}, \text{ тобто}$$

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)\left(x^2-2x+5\right)}=\frac{A\left(x^2-2x+5\right)+(x-1)\left(B_x+C\right)}{(x-1)\left(x^2-2x+5\right)}.$$

Звідси $2x^2-3x-3 \equiv Ax^2-2Ax+5A+Bx^2-Bx+Cx-C$, тобто

$2x^2-3x-3 \equiv (A+B)x^2+(-2A-B+C)x+(5A-C)$.

Прирівнюючи коефіцієнти при x^2, x^1, x^0, отримаємо

$$\begin{cases} 2=A+B, \\ -3=-2A-B+C, \\ -3=5A-C. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, знаходимо, що $A=-1, B=3, C=-2$. Отже,

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)\left(x^2-2x+5\right)}=\frac{-1}{x-1}+\frac{3x-2}{x^2-2x+5}. \text{ ►}$$

3.2. Інтегрування елементарних раціональних дробів

Знайдемо інтеграли від елементарних раціональних дробів.

1. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\cdot\ln|x-a|+C$ (формула (3) таблиці інтегралів);

2. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\cdot\int(x-a)^{-k}d(x-a)=A\cdot\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C$ (формула (2));

3. Розглянемо інтеграл $J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$.

Виділивши в знаменнику повний квадрат, отримаємо:

$$J = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}}dx,$$

причому $q - \frac{p^2}{4} > 0$. Зробимо підстановку $x + \frac{p}{2} = t$. Тоді $x = t - \frac{p}{2}$, $dx = dt$. Покладемо $q - \frac{p^2}{4} = a^2$. Отже, використовуючи формули (3) і (19) таблиці інтегралів, отримуємо:

$$J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt =$$

$$= M\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2}\cdot \ln\left(t^2+a^2\right) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot \frac{1}{a} arctg\frac{t}{a} + C,$$

тобто, повертаючись до змінної x

$$J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + + \frac{N - \frac{M_p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \cdot \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

Приклад 4. Знайти $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10}dx$.

◄ $x^2+2x+10 = (x+1)^2 + 9$. Зробимо підстановку $x+1=t$. Тоді $x = t-1$, $dx = dt$ і

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10}dx = \int \frac{3(t-1)+1}{t^2+9}dt = 3\int \frac{tdt}{t^2+9} - 2\int \frac{dt}{t^2+9} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left(t^2+9\right) - \frac{2}{3}arctg\frac{t}{3} + C = \frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+10\right) - -\frac{2}{3}arctg\frac{x+1}{3} + C. \quad ►$$

4. Обчислення інтеграла вигляду $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx, k \geq 2, q-\frac{p^2}{4}>0$.

Даний інтеграл підстановкою $x+\frac{p}{2}=t$ зводиться до суми двох інтегралів: $M\int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}, a^2=q-\frac{p^2}{4}$.

Перший інтеграл легко обчислюється:

$$\int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{2}\int \left(t^2+a^2\right)^{-k}d\left(t^2+a^2\right)==\frac{1}{2(1-k)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}+C.$$

Обчислимо другий інтеграл:

$$J_k=\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{a^2}\int \frac{\left(t^2+a^2\right)-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}-\int \frac{t^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}\right)=\frac{1}{a^2}\left(J_{k-1}-\int \frac{t^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}\right). \quad (3.8)$$

До останнього інтеграла застосуємо інтегрування частинами. Покладемо $u=t, dv=\frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k}, du=dt,$

$v=\frac{1}{2}\int \left(t^2+a^2\right)^{-k}d\left(t^2+a^2\right)=\frac{1}{2(1-k)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}$, тоді

$$\int \frac{t^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\frac{t}{2(1-k)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}-\frac{1}{2(1-k)}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}=\frac{t}{2(1-k)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}-\frac{1}{2(1-k)}\cdot J_{k-1}$$

Підставляючи знайдений інтеграл у рівність (3.8), отримаємо

$J_k=\frac{1}{a^2}\left(J_{k-1}-\frac{t}{2(1-k)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}+\frac{1}{2(1-k)}J_{k-1}\right)$, тобто

$$J_k=\frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}J_{k-1}+\frac{t}{2(k-1)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}\right).$$

Отримана формула дає можливість знайти інтеграл J_k для будь-якого натурального числа $k > 1$.

Приклад 5. Знайти інтеграл $J_3 = \int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^3}$.

◄ Тут $a = 1$ до $k = 3$. Оскільки $J_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = arctgt + C$, то

$$J_2 = \int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2} = \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2} J_1 + \frac{t}{2\cdot(2-1)\left(t^2+1\right)} = = \frac{1}{2} arctgt + \frac{t}{2\left(t^2+1\right)} + C,$$

$$J_3 = \frac{3}{4} J_2 + \frac{t}{4\left(t^2+1\right)} = \frac{t}{4\left(t^2+1\right)^2} + + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} arctgt + \frac{t}{2\left(t^2+1\right)}\right) + C.$$ ►

3.3. Інтегрування раціональних дробів

Розглянутий у пунктах 1-3 матеріал дозволяє сформулювати загальне правило інтегрування раціональних дробів.

1. Якщо дріб неправильний, то подати його у вигляді суми многочлена і правильного дробу (див. пункт 2);
2. Розклавши знаменник правильного раціонального дробу на множники, подати його у вигляді суми елементарних раціональних дробів;
3. Проінтегрувати многочлен і отриману суму елементарних дробів.

Приклад 6. Знайти інтеграл $\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx$.

◄ Під знаком інтеграла неправильний дріб; виділимо його цілу частину шляхом ділення чисельника на знаменник:

$$\begin{array}{l|l} \_\; x^5 \quad +2x^3 \quad +4x+4 & \underline{x^4+2x^3+2x^2} \\ \underline{x^5+2x^4+2x^3} & x-2 \\ \quad \_\,-2x^4 \quad +4x+4 & \\ \quad \underline{-2x^4-4x^3-4x^2} & \\ \qquad 4x^3+4x^2+4x+4 \text{ (остача).} & \end{array}$$

Отримаємо: $\dfrac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2+\dfrac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}.$

Розкладемо правильний раціональний дріб на елементарні дроби:

$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2\left(x^2+2x+2\right)}==\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C_x+D}{x^2+2x+2},$$

$4x^3+4x^2+4x+4\equiv Ax\left(x^2+2x+2\right)+B\left(x^2+2x+2\right)++\left(C_x+D\right)x^2$, тобто

$4x^3+4x^2+4x+4\equiv\left(A+C\right)x^3+\left(2A+B+D\right)x^2++\left(2A+2B\right)x+2B$.

Звідси маємо

$$\begin{cases}A+C=4,\\2A+B+D=4,\\2A+2B=4,\\2B=4.\end{cases}$$

Знаходимо: $B=2, A=0, C=4, D=2$.

Отже $\dfrac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{4x+2}{x^2+2x+2}$, і
$\dfrac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{4x+2}{x^2+2x+2}$.

Інтегруємо отриману рівність:

$$\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx=\int\left(x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+\int\frac{4x+2}{\left(x+1\right)^2+1}dx.$$

Позначимо $x+1=t$, тоді $x=t-1$ і $dx=dt$. Таким чином

$$\int\frac{4x+2}{\left(x+1\right)^2+1}dx=\int\frac{4t-4+2}{t^2+1}dt=4\int\frac{tdt}{t^2+1}-2\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$4\cdot\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)-2arctgt+C=2\cdot\ln\left(x^2+2x+2\right)--2arctg\left(x+1\right)+C.$$

Отже

$$\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + +2\ln\left(x^2+2x+2\right) - 2arctg\left(x+1\right) + C \text{ . ►}$$

Відзначимо, що будь-яка раціональна функція інтегрується в елементарних функціях.

4. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

4.1. Універсальна тригонометрична підстановка

Розглянемо деякі випадки знаходження інтеграла від тригонометричних функцій. Функцію із змінними $\sin x$ і $\cos x$, над якими виконуються раціональні дії (додавання, віднімання, множення і ділення) прийнято позначати $R(\sin x;\cos x)$, де R – знак раціональної функції.

Обчислення невизначених інтегралів типу $\int R(\sin x;\cos x)dx$ зводиться до обчислення інтегралів від раціональної функції підстановкою $tg\frac{x}{2}=t$, яка називається ***універсальною***.

Дійсно $\sin x = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$,

$x = 2arctgt, \quad dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$.

Тому $\int R(\sin x;\cos x)dx = \int R\left(\dfrac{2t}{1+t^2};\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\dfrac{2}{1+t^2}dt = \int R_1(t)dt$

де $R_1(t)$ − раціональна функція від t. Звичайно, цей спосіб досить громіздкий, зате він завжди приводить до результату.

На практиці застосовують і інші, більш прості підстановки, залежно від властивостей (і вигляду) підінтегральної функції. Зокрема, зручні наступні правила:

1) якщо функція $R(\sin x;\cos x)$ непарна відносно $\sin x$, тобто $R(-\sin x;\cos x) = -R(\sin x;\cos x)$, то підстановку $\cos x = t$ раціоналізує інтеграл;

2) якщо функція $R(\sin x;\cos x)$ непарна відносно $\cos x$, тобто $R(\sin x;-\cos x)=-R(\sin x;\cos x)$, то виконується підстановка $\sin x=t$;

3) якщо функція $R(\sin x;\cos x)$ парна відносно $\sin x$ і $\cos x$, тобто $R(-\sin x;-\cos x)=R(\sin x;\cos x)$, то інтеграл раціоналізується підстановкою $tgx=t$. Така ж підстановка застосовується, якщо інтеграл має вигляд $\int R(tgx)dx$.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

◀ Зробимо універсальну підстановку $t=tg\frac{x}{2}$. Тоді, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. Отже

$$\int\frac{dx}{3+\sin x+\cos x}=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+t+2}==\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=\frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{7}/2}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{7}}\cdot arctg\frac{1+2tg\frac{x}{2}}{\sqrt{7}}+C.$$ ▶

Приклад 2. Знайти інтеграл $I=\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

◀ Оскільки

$$R(-\sin x;-\cos x)=\frac{1}{1+(-\sin x)^2}=\frac{1}{1+\sin^2 x}==R(\sin x;\cos x),$$ то

вважаємо $tgx=t$. Звідси

$$x=arctgt,\qquad dx=\frac{dt}{1+t^2}\quad \text{і}\quad \sin^2 x=\frac{tg^2x}{1+tg^2x}=\frac{t^2}{1+t^2}.$$

Тому $I=\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+\frac{t^2}{1+t^2}\right)}=\int\frac{dt}{2t^2+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(\sqrt{2}t\right)}{\left(\sqrt{2}t\right)^2+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\sqrt{2}t+C=$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\sqrt{2}tgx\right)+C$. ►

4.2. Інтеграли виду $\int\sin^m x\cdot\cos^n xdx$

Для знаходження таких інтегралів використовуються наступні прийоми:

1) підстановка $\sin x=t$, якщо n – ціле додатне непарне число;

2) підстановка $\cos x=t$, якщо m – ціле додатне непарне число;

3) формули пониження порядку: $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$, якщо m і n – цілі невід'ємні парні числа;

4) підстановка $tgx=t$, якщо $m+n$ – є парне від'ємне ціле число.

Приклад 3. Знайти інтеграл $I=\int\sin^4 x\cos^5 xdx$.

◄ Застосуємо підстановку $\sin x=t$. Тоді $x=\arcsin t$, $dx=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt, \cos x=\sqrt{1-t^2}$ і $I=\int t^4\cdot\left(\sqrt{1-t^2}\right)^5\cdot\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int t^4\left(1-t^2\right)^2 dt=$

$=\int\left(t^4-2t^6+t^8\right)dt=\frac{t^5}{5}-2\frac{t^7}{7}+\frac{t^9}{9}+C==\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+C$. ►

Приклад 4. Знайти інтеграл $I=\int\sin^4 x\cos^2 xdx$.

◄ $I=\int(\sin x\cos x)^2\sin^2 xdx=\int\frac{1}{4}\sin^2 2x\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx=$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2xdx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2xdx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)dx -$$

$$-\frac{1}{16}\int \sin^2 2xd(\sin 2x) = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C. \blacktriangleright$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x} = \int \cos^{-1} x \cdot \sin^{-3} xdx$.

◀ Тут $m + n = -4$. Позначимо $tgx = t$. Тоді $x = arctgt$,

$dx = \frac{dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ і

$$I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t^3}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^3}} = \int \frac{1+t^2}{t^3}dt = \int t^{-3}dt + \int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C = -\frac{1}{2}\cdot ctg^2 x + \ln|tgx| + C. \blacktriangleright$$

4.3. Використання тригонометричних перетворень

Інтеграли типу $\int \sin ax \cdot \cos bxdx$, $\int \cos ax \cdot \cos bxdx$, $\int \sin ax \cdot \sin bxdx$ обчислюються за допомогою відомих тригонометричних формул:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)).$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $I = \int \sin 8x \cos 2xdx$.

◀ $I = \int \sin 8x\cos 2xdx = \frac{1}{2}\int(\sin 10x + \sin 6x)dx =$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{10}\cos 10x-\frac{1}{6}\cos 6x\right)+C. \blacktriangleright$$

5. ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

5.1. Квадратичні ірраціональності

Розглянемо деякі типи інтегралів, що містять ірраціональні функції.

Інтеграли типу $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$, $\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ називають ***невизначеними інтегралами від квадратичних ірраціональностей***. Їх можна знайти таким чином: під радикалом виділити повний квадрат

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)==a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$$

і зробити підстановку $x+\frac{b}{2a}=t$. При цьому перші два інтеграли приводяться до табличних, а третій – до суми двох табличних інтегралів.

Приклад 1. Знайти інтеграли $I=\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$.

◀ Оскільки $4x^2+2x+1=4\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)=4\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}\right)$, то

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{4\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}\right)}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}}.$$

Зробимо підстановку $x+\frac{1}{4}=t$, $x=t-\frac{1}{4}$, $dx=dt$. Тоді

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+3/16}}=\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{3}{16}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{4}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}\right|+C\text{. ►}$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $I=\int\frac{x+4}{\sqrt{6-2x-x^2}}dx$.

◄ Оскільки $6-2x-x^2=-(x^2+2x-6)=-((x+1)^2-7)=7-(x+1)^2$, то підстановка має вигляд $x+1=t$, $x=t-1, dx=dt$. Тоді

$$I=\int\frac{t-1+4}{\sqrt{7-t^2}}dt=\int\frac{tdt}{\sqrt{7-t^2}}+3\int\frac{dt}{\sqrt{7-t^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(7-t^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(7-t^2\right)+3\int\frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2-t^2}}=$$

$$=-\sqrt{7-t^2}+3\cdot\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}}+C=3\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{7}}--\sqrt{6-2x-x^2}+C\text{. ►}$$

Інтеграли типу $\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, де $P_n(x)$ − многочлен степеня n можна обчислювати, користуючись формулою

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}+\quad+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\qquad(5.1)$$

де $Q_{n-1}(x)$− многочлен степеня $n-1$ з невизначеними коефіцієнтами, λ – також невизначений коефіцієнт.

Всі невизначені коефіцієнти знаходяться з тотожності, отриманої диференціюванням обох частин рівності (5.1):

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\equiv\left(Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}\right)'++\frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$ після чого необхідно прирівняти коефіцієнти при однакових степенях невідомої x.

Приклад 3. Знайти інтеграл $I=\int\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx$

◄ За формулою (5.1) маємо:

$$I=\int\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx=\left(A_x+B\right)\sqrt{1-2x-x^2}++\lambda\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$$

Диференціюючи цю рівність, отримаємо:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}\equiv A\cdot\sqrt{1-2x-x^2}+\left(A_x+B\right)\cdot\frac{-2-2x}{2\sqrt{1-2x-x^2}}++\frac{\lambda}{\sqrt{1-2x-x^2}},$$

тобто $x^2\equiv A\left(1-2x-x^2\right)+\left(A_x+B\right)\left(-1-x\right)+\lambda$,

$x^2\equiv A-2Ax-Ax^2-Ax-B-Ax^2-Bx+\lambda$.

Порівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$1=-A-A$, при x^2

$0=-2A-A-B$, при x^1

$0=A-B+\lambda$, при x^0

Звідси $A=-\frac{1}{2}$ $B=\frac{3}{2}$ $\lambda=2$.

Отже $I=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{1-2x-x^2}+2\int\frac{dx}{\sqrt{2-(x+1)^2}}=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{1-2x-x^2}+$

$+2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$. ►

5.2. Дробово-лінійна підстановка

Інтеграли виду $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha/\beta},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\delta/\gamma}\right)dx$, де a,b,c,d – дійсні числа, $\alpha,\beta,\ldots,\delta,\gamma$ – натуральні числа, зводяться до інтегралів від раціональної функції шляхом підстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, де k – найменше спільне кратне знаменників дробів $\frac{\alpha}{\beta},\ldots,\frac{\delta}{\gamma}$.

Дійсно, з підстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$ виходить, що $x=\frac{b-dt^k}{ct^k-a}$ і $dx=\frac{-dkt^{k-1}\left(ct^k-a\right)-\left(b-dt^k\right)ckt^{k-1}}{\left(ct^k-a\right)^2}dt$, тобто x і dx виражаються через раціональні функції від t. При цьому і кожний степінь дробу $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ виражається через раціональну функцію від t.

Приклад 4. Знайти інтеграл $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt{x+2}}$.

◀ Найменше спільне кратне знаменників дробів $\dfrac{2}{3}$ і $\dfrac{1}{2}$ є 6. Тому вважаємо $x+2=t^6$, $x=t^6-2$, $dx=6t^5dt$, $t=\sqrt[6]{x+3}$. Отже

$$I = \int \frac{6t^5dt}{t^4-t^3} = 6\int \frac{t^2dt}{t-1} = 6\int \frac{(t^2-1)+1}{t-1}dt =$$

$$= 6\int \left(t+1+\frac{1}{t-1} \right)dt = 3t^2+6t+6\ln|t-1|+C =$$

$$= 3\cdot\sqrt[3]{x+2} + 6\cdot\sqrt[6]{x+2} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x+2}-1\right| + C. \quad ▶$$

5.3. Тригонометрична підстановка

Інтеграли типу $\int R\left(x;\sqrt{a^2-x^2}\right)dx, \int R\left(x;\sqrt{a^2+x^2}\right)dx, \int R\left(x;\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ зводяться до інтегралів від функцій, раціонально залежних від тригонометричних функцій, за допомогою наступних тригонометричних підстановок: $x = a\cdot\sin t$ для першого інтеграла; $x = a\cdot tgt$ для другого інтеграла; $x = \dfrac{a}{\sin t}$ для третього інтеграла.

Приклад 5. Знайти інтеграл $I = \int \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$.

◀ Покладемо $x = 2\sin t$, $dx = 2\cos t dt$, $t = \arcsin\dfrac{x}{2}$. Тоді

$$I = \int \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt = \int \frac{4\cos^2 t}{4\sin^2 t}dt =$$

$$= \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt = -ctgt - t + C =$$

$$= C - \arcsin\frac{x}{2} - ctg\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) = C - \arcsin\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

$$\left(ctgt = \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} \right). \ ►$$

5.4. Інтеграли виду $\int R\left(x; \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

Тут підінтегральна функція є раціональною функцією відносно x і $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Виділивши під радикалом повний квадрат і зробивши підстановку $x + \frac{b}{2a} = t$, інтеграли вказаного типу приводяться до інтегралів вже розглянутого типу, тобто до інтегралів типу $\int R\left(t; \sqrt{a^2-t^2}\right)dt$, $\int R\left(t; \sqrt{t^2+a^2}\right)dt$, $\int R\left(t; \sqrt{t^2-a^2}\right)dt$. Ці інтеграли можна обчислити за допомогою відповідних тригонометричних підстановок.

Приклад 6. Знайти інтеграл $I = \int \frac{\sqrt{x^2+2x-4}}{(x+1)^3}dx$.

◄ Оскільки $x^2+2x-4 = (x+1)^2 - 5$, то $x+1 = t$, $x = t-1$, $dx = dt$. Тому $I = \int \frac{\sqrt{t^2-5}}{t^3}dt$. Покладемо $t = \frac{\sqrt{5}}{\sin z}, dt = \frac{-\sqrt{5}\cdot\cos z}{\sin^2 z}dz$, $z = \arcsin\frac{\sqrt{5}}{t}$. Тоді

$$I = \int \frac{\sqrt{\frac{5}{\sin^2 z} - 5}}{\frac{5\sqrt{5}}{\sin^3 z}} \cdot \frac{\left(-\sqrt{5}\right)\cos z}{\sin^2 z}dz = -\frac{1}{\sqrt{5}}\int \cos^2 z dz =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}\int(1+\cos 2z)dz = -\frac{\sqrt{5}}{10}\left(z + \frac{1}{2}\sin 2z\right) + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{t} + \frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt{5}}{t}\right)\right) + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt{5}}{x+1}\right)\right) + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{x^2+2x-4}}{(x+1)^2}\right) + C . \blacktriangleright$$

Зауваження: Інтеграл типу $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ доцільно знаходити за допомогою підстановки $x = \frac{1}{t}$.

5.5. Інтегрування диференціального бінома

Інтеграли типу $\int x^m \cdot \left(a + bx^n\right)^p dx$, які називаються інтегралами від диференціального бінома, де a, b – дійсні числа; m, n, p – раціональні числа, беруться, як показав Чебишов П.А., лише у разі, коли хоча б одне з чисел p , $\frac{m+1}{n}$ або $\frac{m+1}{n} + p$ є цілим.

Інтегрування у цих випадках здійснюється наступними підстановками:

1) якщо p – ціле число, то підстановка $x = t^k$, де k – найменше спільне кратне знаменників дробів m і n;

2) якщо $\frac{m+1}{n}$ – ціле число, то підстановка $a + bx^n = t^s$, де s - знаменник дробу p .

3) якщо $\frac{m+1}{n} + p$ – ціле число, то підстановка $a + bx^n = x^n \cdot t^s$, де s – знаменник дробу p .

У всій решті випадків інтеграли типу $\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$ не виражаються через відомі елементарні функції, тобто не «беруться».

Приклад 7. Знайти інтеграл $I=\int \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}dx$.

◀ Оскільки $I=\int x^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx,$ то $m=-\frac{1}{2},\ n=\frac{1}{4}\ ,\ \ p=\frac{1}{3}\quad \frac{m+1}{n}=2$.

Тому робимо підстановку

$\sqrt[4]{x}+1=t^3,\quad x=\left(t^3-1\right)^4,\quad dx=4\left(t^3-1\right)^3\cdot 3t^2dt,\quad t=\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}$. Таким чином,

$$I=\int\frac{t}{\left(t^3-1\right)^2}\cdot 12t^2\left(t^3-1\right)^3dt=12\int\left(t^6-t^3\right)dt=$$

$$=12\cdot\frac{t^7}{7}-12\cdot\frac{t^4}{4}+C=\frac{12}{7}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{\frac{7}{3}}-3\cdot\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{\frac{4}{3}}+C.$$ ▶

6. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

6.1. Означення визначеного інтеграла

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$. Довільно розіб'ємо цей відрізок на n частин точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_i<\ldots<x_n=b$ довжиною $\vartriangle x_i=x_i-x_{i-1}$. Всередині кожного відрізка візьмемо точки $\xi_i\in\left(x_{i-1},x_i\right)$. Складаємо суму $\sum_{i=1}^{n}f\left(\xi_i\right)\vartriangle x_i$. Ця сума називається ***інтегральною сумою Рімана функції*** $f(x)$. Функція $f(x)$ називається інтегровною (за Ріманом) на відрізку $[a;b]$, якщо існує скінчена границя $\lim\limits_{\max\vartriangle x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}f\left(\xi_i\right)\vartriangle x_i$, яка не залежить від розбиття інтервала та вибору точок ξ_i. Ця границя називається ***визначеним інтегралом Рімана*** функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначається

$$\lim_{\max\vartriangle x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}f\left(\xi_i\right)\vartriangle x_i=\int_a^b f(x)dx.$$

6.2. Властивості визначеного інтеграла

1. $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$;

2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

3. $\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx, \quad c = const$;

4. $\int\limits_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx$;

5. Для довільної точки $c, \quad a < c < b \ \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$;

6. Якщо $f(x) \geq 0, \quad a < b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$;

7. $f_1(x) \geq f_2(x)$ і $a < b$, то $\int\limits_a^b f_1(x)dx \geq \int\limits_a^b f_2(x)dx$.

6.3. Обчислення визначеного інтеграла

Формула Ньютона-Лейбніца

Теорема 6.1. Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$ і має на ньому первісну F. Тоді

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Заміна змінних та інтегрування частинами

Теорема 6.2. Нехай функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, а функція $\varphi:[\alpha;\beta] \to [a;b]$. Якщо φ неперервно диференційовна на $[\alpha;\beta]$, то виконується рівність

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

Теорема 6.3. Нехай функції u і v неперервно диференційовні на відрізку $\left[a;b\right]$. Тоді має місце формула інтегрування частинами

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \ .$$

Рекурентні формули

Мають місце формули:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } n \text{ парне;} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{якщо } n \text{ непарне.} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } m \text{ і } n \text{ парні;} \\ \dfrac{(n-1)!!}{(m+n)!!}, & \text{якщо } n \text{ непарне;} \\ \dfrac{(m-1)!!}{(m+n)!!}, & \text{якщо } m \text{ непарне.} \end{cases}$$

Приклад 1. Обчислити $\int_0^1 e^{5x-1}dx$.

$$◄ \quad \int_0^1 e^{5x-1}dx = \frac{1}{5}\int_0^1 e^{5x-1}d(5x-1) = \frac{1}{5}e^{5x-1}\Big|_0^1 = \frac{1}{5}\left(e^4 - e^{-1}\right). \ ►$$

Приклад 2. Обчислити $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \cos 2x dx$.

$$◄ \quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \cos 2x dx = \begin{bmatrix} t = 2x \\ dt = 2dx \\ x_1 = -\dfrac{\pi}{4}, \quad x_2 = 0 \\ t_1 = -\dfrac{\pi}{2}, \quad t_2 = 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{1}{2}. \ ►$$

Приклад 3. Обчислити

$$\blacktriangleleft \int_0^1 xe^{-x}dx = \begin{bmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^{-x}dx, & v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = $$
$$= -\frac{1}{e} - e^{-x}\Big|_0^1 = -\frac{1}{e} - \left(\frac{1}{e} - 1\right) = -\frac{2}{e} + 1. \blacktriangleright$$

8. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

8.1. Площа плоскої фігури

Нехай функція $f(x)$ неперервна і невід'ємна на відрізку $[a;b]$. Частина площини, що обмежена графіком функції $y = f(x)$ відрізком $[a;b]$ і прямими $x = a, \quad x = b$, називається *криволінійною трапецією з основами, паралельними осі OY* $\left(\{(x;y) \ | a \le x \le b, \quad 0 \le y \le f(x)\}\right)$. Площа S такої криволінійної трапеції дорівнює

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Площа фігури $\{(x;y) \ | a \le x \le b, \quad f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$, що знаходиться між графіками функцій f_1 і f_2, дорівнює

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Для функції $x = g(y)$ неперервної і невід'ємної на $[c;d]$ маємо аналогічні формули. Площа *криволінійною трапецією з основами, паралельними осі OX* $\{(x;y) \ | c \le y \le d, \quad g_1(y) \le x \le g_2(y)\}$ обчислюється за формулою

$$S = \int_c^d (g_2(y) - g_1(y))dy.$$

Якщо функція на відрізку $[a;b]$ задана в параметричній формі $x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_1;t_2]$, де $x(t_1) = a, \quad x(t_2) = b$ і функції $x(t), \quad y(t)$

неперервно диференційовні на $\left[t_1;t_2\right]$, то площа криволінійної трапеції дорівнює

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt.$$

Частина площини, що обмежена променями $\varphi=\varphi_1$ і $\varphi=\varphi_2$ і графіком неперервної функції $\rho=\rho(\varphi)$, називається *криволінійним сектором* $\left\{(\varphi;\rho)\ \middle|\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2,\quad 0\le\rho\le\rho(\varphi)\right\}$. Площа криволінійного сектора дорівнює

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)d\varphi.$$

Площа частини криволінійного сектора, що обмежена графіками неперервних функцій $\rho_2(\varphi)\ge\rho_1(\varphi)$ при $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$, дорівнює

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\rho_2{}^2(\varphi)-\rho_1{}^2(\varphi)\right)d\varphi.$$

8.2. Довжина дуги кривої

Довжина дуги гладкої кривої, заданої функцією $y=f(x),\quad a\le x\le b$, обчислюється за формулою

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx.$$

Якщо крива задана параметрично: $x=x(t),\quad y=y(t),\quad t\in\left[t_1;t_2\right]$, то її довжина дорівнює

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt.$$

Якщо крива задана рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$ в полярних координатах, то її довжина дорівнює

$$l=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\varphi.$$

8.3. Площа поверхні обертання

Площа поверхні обертання, утвореної внаслідок обертання неперервної і диференційовної функції $y = f(x) \geq 0, \quad a \leq x \leq b,$ навколо осі OX, обчислюється за формулою

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Якщо крива задана неперервними і диференційовними на відрізку $[t_1;t_2]$ функціями $x = x(t)$ і $y = y(t)$, то площі поверхонь, які утворені внаслідок обертання кривої навколо осі OX і осі OY, відповідно дорівнюють

$$Q = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt, \quad Q = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt.$$

Якщо крива задана в полярних координатах, то площі поверхонь обертання плоскої гладкої кривої навколо променів $\varphi = 0, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}$ відповідно рівні:

$$P = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi, \; P = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi)\cos\varphi\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi.$$

8.4. Об'єм тіла

Якщо відома площа $S(x)$ перерізу тіла кожною площиною, перпендикулярною осі OX, то об'єм тіла дорівнює $V = \int_a^b S(x)\,dx$.

Нехай криволінійна трапеція обмежена зверху графіком неперервної функції $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Якщо цю трапецію обертати навколо осі OX, то отримаємо тіло обертання об'єму $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$. Якщо криволінійна трапеція обмежена графіком неперервної функції $x = g(y) \geq 0$ і прямими $y = c, \quad y = d, \quad x = 0,$ то об'єм тіла, утвореного обертанням даної трапеції навколо осі OY, знаходять за формулою $V = \pi \int_c^d g^2(y)\,dy$.

8.5. Маса, статичні моменти, координати центра мас і моменти інерції

Якщо матеріальна дуга задано неперервною на відрізку $[a;b]$ функцією $y=f(x)$ та має змінну густину $\gamma=\gamma(x)$, то її маса обчислюється за формулою $m=\int\limits_a^b \gamma(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$.

Якщо дугу задано параметричними рівняннями, то маса дорівнює

$$m=\int\limits_{t_1}^{t_2} \gamma(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt.$$

Якщо дугу задано в полярних координатах, то маса дорівнює

$$m=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \gamma(\varphi)\sqrt{(\rho)^2+(\rho')^2}\,d\varphi.$$

Якщо матеріальна дуга задано неперервною на відрізку $[a;b]$ функцією $y=f(x)$ та має змінну густину $\gamma=\gamma(x)$, то статичні моменти відносно осей координат відповідно дорівнюють:

$$M_x=\int\limits_a^b y\gamma(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx,\quad M_y=\int\limits_a^b x\gamma(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx;$$

координати центра мас:

$$x_c=\frac{M_y}{m},\quad y_c=\frac{M_x}{m};$$

моменти інерції відносно осей OX і OY:

$$I_x=\int\limits_a^b y^2(x)\gamma(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx,\quad I_y=\int\limits_a^b x^2(x)\gamma(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

9. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

9.1. Невласні інтеграли першого роду

Якщо функція $y = f(x)$ є неперервною на проміжку $[a;b] \in [a;+\infty)$, тоді інтеграл $J^{+\infty} = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$ називається ***невласним інтегралом першого роду з нескінченною верхньою межею.***

Якщо функція $y = f(x)$ є неперервною на проміжку $[a;b] \in (-\infty;b]$, тоді інтеграл $J_{-\infty} = \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$ називається ***невласним інтегралом першого роду з нескінченною нижньою межею***.

Якщо ці границі існують і скінченні, то інтеграли $J^{+\infty}$ і $J_{-\infty}$ називають *збіжними*, а якщо ж вони не існують або нескінченні – *розбіжними.*

Приклад 1. Обчислити $J^{+\infty} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

◄ За означенням маємо: $J^{+\infty} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^2} = -\lim\limits_{b\to+\infty} \frac{1}{x}\Big|_1^b = -\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b} - 1\right) = 1$, отже, інтеграл збігається. ►

Приклад 2. Обчислити $J_{-\infty} = \int\limits_{-\infty}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx.$

$$◄\ J_{-\infty} = \int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{1+x^2} \lim\limits_{a\to-\infty} arctgx\Big|_a^1 = \lim\limits_{a\to-\infty}\left(arctg1 - arctga\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.\ ►$$

Отже, інтеграл збігається.

Приклад 3. Обчислити $J^{+\infty} = \int\limits_4^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

$$◄\ J^{+\infty} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_4^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\lim\limits_{b\to+\infty} \sqrt{x}\Big|_4^b = 2\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\sqrt{b} - 2\right) = +\infty.$$

Отже, інтеграл розбіжний. ►

Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на проміжку $[a;b]\in(+\infty;-\infty)$, то інтеграл $J_{+\infty}^{-\infty}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{c}f(x)dx+\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{c}^{b}f(x)dx$ називається ***невласним інтегралом із нескінченними нижньою і верхньою межами.*** Тут $c\in[a;b]$. Якщо інтеграли $J^{+\infty}$ і $J_{-\infty}$ збігаються, то $J_{-\infty}^{+\infty}$ збігається, а якщо хоча б один із інтегралів $J^{+\infty}$ і $J_{-\infty}$ розбіжний, то й інтеграл $J_{-\infty}^{+\infty}$ також є розбіжним.

Приклад 4. Обчислити інтеграл $J_{-\infty}^{+\infty}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-6x+13}$.

◄ За означенням маємо:

$$J_{-\infty}^{+\infty}=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{d(x-3)}{(x-3)^2+4}+\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{d(x-3)}{(x-3)^2+4}=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}arctg\frac{x-3}{2}\Big|_{a}^{0}+\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}arctg\frac{x-3}{2}\Big|_{0}^{b}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[arctg\left(-\frac{3}{2}\right)-\lim_{a\to-\infty}arctg\frac{x-3}{2}+\lim_{b\to+\infty}arctg\frac{b-3}{2}-arctg\left(-\frac{3}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-arctg\frac{3}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}+arctg\frac{3}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Отже, інтеграл є збіжним. ►

9.2. Невласні інтеграли другого роду

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на проміжку $[a;b)$. Точку $x=b$ називають *особливою точкою функції* $y=f(x)$, якщо $f(x)\to\infty$ при $x\to b-0$. Нехай функція $y=f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b-\varepsilon]$ при довільному $\varepsilon>0$ такому, що $b-\varepsilon>a$; тоді, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon}f(x)dx$, то її називають ***невласним інтегралом другого роду*** і позначають $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$. Якщо ця границя існує і скінченна, то невласний інтеграл називається *збіжним*; якщо вона не існує або нескінченна – *розбіжним*.

Аналогічно якщо $x=a-$особлива точка, то невласний інтеграл визначається так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Якщо $f(x)$ необмежена в околі будь-якої внутрішньої точки $c\in(a;b)$, то за умови існування обох невласних інтегралів $\int_a^c f(x)dx,\quad \int_c^b f(x)dx$ за означенням покладають

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Якщо a та b – особливі точки, то за умови існування обох невласних інтегралів $\int_a^c f(x)dx,\quad \int_c^b f(x)dx$ за означенням покладають

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Приклад 5. Обчислити невласний інтеграл 2-го роду $\int_0^1 \ln x dx$.

◄ Точка x=0 – особливо точка, тоді за означенням маємо:

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \ln x dx = \begin{bmatrix} u=\ln x, & du=\frac{dx}{x} \\ dv=dx, & v=x \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(x\ln x - x\right)\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left(1\cdot\ln 1 - 1\right) - \left(\varepsilon\ln\varepsilon - \varepsilon\right)\right] =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(\ln\varepsilon)'}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)'} - 1 = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{-1}{\varepsilon^2}} - 1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon - 1 = -1.$$

Отже, невласний інтеграл збіжний. ►

10. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

10.1. Диференціальне рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння (ДР) першого порядку, яке розв'язане відносно похідної, має вигляд

$$y' = f(x, y). \tag{10.1}$$

Задача Коші: серед усіх ров'язків рівняння (10.1) знайти такий, який задовольняє початкову умову (ПУ):

$$y|_{x=x_0} = y_0. \tag{10.2}$$

Загальним розв'язком ДР (10.1) називається множина функцій $y = \varphi(x, C)$, де C – довільна стала, які задовольняють (10.1) при будь-яких значеннях C. Кожний *частинний розв'язок* задачі Коші $y = \varphi(x, C_0)$ отримується із загального при $C = C_0$, де C_0 задовольняє рівняння $y_0 = \varphi(x_0, C)$.

Зінтегрувати ДР означає: знайти його загальний розв'язок (загальний інтеграл, якщо розв'язок знайдено в неявному вигляді) або за заданих ПУ із загального розв'язку знайти частинний розв'язок задачі Коші.

1. **Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:**
$$M_1(x) \cdot M_2(y)dx + N_1(x) \cdot N_2(y)dy = 0. \tag{10.3}$$

Звідси маємо

$$\left[\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = C, \\ N_1(x) = 0, \quad M_2(y) = 0. \end{array}\right.$$

ДР $y' = f(ax + by + c)$ зводимо до (1.3) заміною $t = ax + by + c$.

2. **Диференціальне рівняння, однорідне відносно змінних:**
$$y' = f(x, y),$$

де $f(kx, ky) = f(x, y)$, k – будь-яке число, рівносильне рівнянню

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{10.4}$$

У цьому разі функція $f(x, y)$ називається *однорідною функцією нульового виміру*.

Заміною $y = tx$, де $t = t(x)$, звідки $y' = t + xt'$, однорідне рівняння (10.4) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними (10.3).

ДР $y' = f\left(\dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$ зводиться до (10.4) заміною $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, якщо $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, де $\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0; \end{cases}$

якщо $\Delta = 0$, то заміна $t = a_1 x + b_1 y + c_1$.

3. Лінійне диференціальне рівняння:

$$y' + P(x)y = Q(x). \qquad (10.5)$$

Загальний розв'язок рівняння (10.5) знаходиться за допомогою підстановки, запропонованої Бернуллі: $y = u \cdot v$, $u = u(x)$, $v = v(x)$. Підставивши y і $y' = u'v + uv'$ в (10.5), дістанемо

$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$, звідки $uv' + v(u' + P(x)u) = Q(x)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} u' + P(x)u = 0, \\ v' = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}, \end{array}\right. \Rightarrow \quad y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right).$$

4. Рівняння Бернуллі:

$$y' + P(x)y = Q(x) \cdot y^{\alpha}, \quad \alpha \notin \{0; 1\}. \qquad (10.6)$$

Зробивши в (10.6) заміну $y = u \cdot v$ або (10.4), одержимо $\dfrac{y'}{y^{\alpha}} + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x)$ і заміною $y^{1-\alpha} = t$ зводимо (10.6) до (10.5).

5. Рівняння у повних диференціалах:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \qquad (10.7)$$

за умови $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

З (10.7) випливає, що $Pdx + Qdy = dU(x, y) = 0$, звідки $U(x, y) = C$.

10.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку

Загальний розв’язок ДР n-го порядку

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{10.8}$$

неперервно залежить від n довільних сталих $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$.

Задача Коші для рівняння (10.8) полягає у знаходженні часткового розв’язку, який задовольняє початкові умови:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

де $x_0 \in (a, b)$, $\quad y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ – довільні наперед задані дійсні числа.

Такі рівняння інтегруються лише в деяких випадках. Розглянемо основні з них.

1. Рівняння

$$y^{(n)} = f(x),$$

де $f(x)$ – функція, неперервна на інтервалі (a, b), інтегрується у квадратурах внаслідок n-кратного інтегрування:

$$y = \underbrace{\int\int\ldots\int}_{n} f(x)\underbrace{dxdx\ldots dx}_{n} + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_n.$$

2. Якщо в рівняння явно не входить шукана функція y та її перші похідні до порядку $k-1 \quad (1 \le k < n)$ включно

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

то внаслідок підстановки $y^{(k)}(x) = p(x)$ порядок рівняння знижується на k одиниць: $F\left(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}\right) = 0$.

Зокрема, рівняння другого порядку

$$F(x, y', y'') = 0$$

у результаті підстановки $y' = p(x)$, $\quad y'' = p'(x)$ зводиться до рівняння першого порядку $F(x, p, p') = 0$.

3. Диференціальне рівняння

$$F\left(y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0,$$

яке не містить явно змінної x, допускає зниження порядку на одиницю внаслідок підстановки $y'(x) = p(y)$. Тоді

$$y''(x) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy};$$

$$y'''(x) = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2} \qquad \text{і т.д.}$$

10.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами

Лінійне однорідне диференціальне рівняння (ЛОДР) n-го порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \qquad (10.9)$$

де $a_i \in R \quad \left(i = \overline{1, n}\right)$.

За Ейлером розв'язки ДР (10.9) шукаємо у вигляді $y = e^{kx}$, тоді $k \in C$ є коренями характеристичного рівняння (ХР)

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n = 0. \qquad (10.10)$$

Загальний розв'язок ЛОДР (10.9) є лінійною комбінацією довільних n лінійно незалежних частинних розв'язків $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, що становлять фундаментальну систему розв'язків (ФСР):

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

де $C_i \quad \left(i = \overline{1, n}\right)$ – довільні сталі.

Залежно від коренів ХР (10.10), відповідні їм частинні розв'язки у ФСР такі:

	Корені ХР	Частинні розв'язки у ФСР
1.	*к* – простий дійсний корінь	e^{kx}
2.	*к* – дійсний корінь кратності *r*	$e^{kx}, xe^{kx}, \dots, x^{r-1}e^{kx}$
3.	$k = \alpha \pm \beta i -$ пара простих комплексно-спряжених коренів	$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad e^{\alpha x}\sin\beta x$
4.	$k = \alpha \pm \beta i -$ пара комплексно-спряжених коренів кратності *r*	$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x,$ $xe^{\alpha x}\sin\beta x, \dots, x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Для ЛОДР другого порядку

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

складаємо характеристичне рівняння

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0. \qquad (10.11)$$

Залежно від дискримінанта D рівняння (10.11) маємо:

	Корені ХР	Загальний розв'язок
1.	$D > 0, \quad k_1 \neq k_2,$	$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2.	$D = 0, \quad k_1 = k_2 = k$	$y(x) = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$
3.	$D < 0, \quad k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

10.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння (ЛНДР) n-го порядку має вигляд

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x), \qquad (10.12)$$

де $a_i \in R \quad \left(i=\overline{1,n}\right)$, $\quad f(x)-$ неперервна функція.

Загальний розв'язок ЛНДР дорівнює сумі загального розв'язку $y_{\text{з.о.}}(x)$ відповідного однорідного рівняння (10.9) і довільного частинного розв'язку $y_{\text{ч.н.}}(x)$ неоднорідного рівняння

$$y(x)=y_{\text{з.о.}}(x)+y_{\text{ч.н.}}(x).$$

Для лінійних рівнянь справджується *принцип суперпозиції* (накладання): якщо функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є частинними розв'язками ДР (10.12) з правими частинами відповідно $f_1(x)$ і $f_2(x)$, то їх сума $y_1(x)+y_2(x)$ є розв'язком ДР з правою частиною $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$.

Розглянемо основні методи знаходження $y_{\text{ч.н.}}(x)$.

1. **Метод невизначених коефіцієнтів (підбору)** використовують у разі спеціального вигляду правої частини ДР $f(x)$ згідно таблиці:

	$f(x)$	*Перевірка наявності резонансу*	$y_{\text{ч.н.}}(x)$
1.	$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+$ $+\ldots+a_n$,	$\alpha=0-$ корінь ХР (10.11) кратності $r \quad (r\ge 0)$	$x^r\cdot Q_n(x)$, де $Q_n(x)=$ $=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n$, $A_i\ \left(i=\overline{0,n}\right)-$ невизначені
2.	$P_n(x)\cdot e^{\alpha x}$	$\alpha-$ корінь ХР (4.2) кратності $r \quad (r\ge 0)$	$x^rQ_n(x)e^{\alpha x}$
3.	$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+$ $+R_m(x)\sin\beta x)$	$\alpha\pm\beta i-$ корені ХР (10.11) кратності $r \quad (r\ge 0)$	$x^r\cdot e^{\alpha x}(M_k(x)\cos\beta x+$ $+N_k(x)\sin\beta x)$, де $k=\max\{m,n\}$

Якщо при перевірці наявності резонансу (збігу власної частоти системи із частотою змушуючої сили) відповідне число не є коренем ХР, то покладають $r=0$. Невизначені коефіцієнти многочленів A_i знаходимо із умови, щоб функція $y_{\text{ч.н.}}(x)$ задовольняла ЛНДР (10.12).

2. **Метод Лагранжа (варіації довільних сталих)** використовують для розв'язання ЛНДР за будь-якої правої частини $f(x)$ за умови, що відомий загальний розв'язок відповідного ЛОДР

$$y_{\text{з.о.}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

Лагранж запропонував шукати частинний розв'язок ЛНДР у вигляді

$$y_{\text{ч.н.}} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \ldots + C_n(x) y_n(x).$$

Тут $C_i(x)$, $\left(i = \overline{1, n}\right)$ є змінними функціями, похідні яких знаходимо із системи:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

11. ЗАВДАННЯ ДЛЯ ТИПОВОЇ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. Знайти інтеграли:

1) $\int (e^x+1)^2 dx$; 2) $\int \frac{x^2+1}{2x^2-1}dx$; 3) $\int \frac{dx}{(3x+1)^5}$;

4) $\int \frac{\sqrt[5]{\ln x}}{x}dx$; 5) $\int \sin t e^{\cos t} dt$; 6) $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}}dx$;

7) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$; 8) $\int (x+1)e^x dx$; 9) $\int \frac{2x^4-12x^2-7x+5}{x^3-7x-6}dx$

10) $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}dx$; 11) $\int \frac{3-9x}{x^3-1}dx$; 12) $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx$;

13) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$; 14) $\int \frac{dx}{1+2\cos x}$; 15) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}\sqrt{x+1}}$;

16) $\int x^3\sqrt{9-x^2}dx$; 17) $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{x^2}dx$.

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_0^2 \frac{x^2+3}{x^2+4}dx$; 2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$; 3) $\int_0^3 \sqrt{x+1}dx$;

4) $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{4x^2+1}}$; 5) $\int_1^2 x^2\ln x dx$; 6) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$.

3. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_0^\infty \frac{xdx}{(1+x)^3}$; 2) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

4. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями:

1) $y=2x^2+3x-5$, $y=1-x^2$; 2) $\rho^2=a^2\cos 4\varphi$.

5. Обчислити довжину дуги кривої:

$$y=\frac{x^{-1}}{4+x^3/3},\ x\,\epsilon\left[2;2\sqrt{3}\right].$$

6. Знайти об'єм тіла, одержаного при обертанні заданої криволінійної трапеції навколо осі: $z^2 = x^2 + \dfrac{y^2}{9}$, $z = 2.$

7. Знайти момент інерції плоскої фігури, обмеженої еліпсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, відносно його головних осей.

8. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(1 + y^2)dx = xdy.$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння: $y^2 + x^2 y' = xyy'.$

10. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння:

$$y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos^3 x},\ y(0) = 0.$$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}.$$

12. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку: $(1 - x^2)y'' - xy' = 2.$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами: $2y'' - 5y' + 2y = 0.$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y''' - 5y'' + 6y' = (x - 1)^2$;

2) $y'' + 4y' + 3y = (9x + 15)e^x$;

3) $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x.$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 4y' + 5y = \frac{e^{-2x}\sin^2 x}{\cos x},\ y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 2

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{x^2}{x^2+4}dx$; 2) $\int \frac{2^x}{1-4^x}dx$; 3) $\int \frac{\ln^2 3x}{x}dx$;

4) $\int x^2 e^{x^3}dx$; 5) $\int e^x \cos e^x dx$; 6) $\int \frac{x-1}{x^2-4x+3}dx$

7) $\int e^x \cos x dx$; 8) $\int (x^2+1)e^x dx$; 9) $\int \frac{3x^4+11x^3-22x-2}{x^3+2x^2-5x-6}dx$;

10) $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}dx$; 11) $\int \frac{6-9x}{x^3+8}dx$; 12) $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}dx$;

13) $\int \sin^4 t \cos^2 t dt$; 14) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$; 15) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$;

16) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(x^2-1)^3}}$; 17) $\int \frac{x^{-1}dx}{\sqrt[3]{1+x^5}}$.

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_0^1 (x^2+1)e^x dx$; 2) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^3 x \frac{dx}{\cos^2 x}$; 3) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$;

4) $\int_0^2 \ln(2x+1)dx$; 5) $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2+x^2}dx$; 6) $\int_0^1 \frac{dz}{z^3-8}$.

3. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$; 2) $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

4. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями:

1) $y = \operatorname{tg} x, \quad y = \frac{4x}{\pi}$; 2) $\rho = a\cos\varphi, \quad \rho = 2a\cos\varphi.$

5. Обчислити площу поверхні, одержаної при обертанні даної кривої навколо осі ОХ:

$$x = a(t-\sin t), \quad y = a(1-\cos t) \quad \text{(циклоїда)}, \quad t \in [0;2\pi].$$

6. Знайти об’єм тіла, одержаного при обертанні заданого криволінійного сектора навколо полярної осі: $\rho = \cos^2 \varphi, \qquad \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$

7. Точка здійснює гармонічні коливання по осі абсцис. Її швидкість $V = V_0 \cos \omega t$, де ω, V_0 – сталі. Знайти закон коливання точки, якщо при $t = 0$ вона мала абсцису $x = 0$.

8. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0.$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$(x^2 + y^2)y' = 2xy.$$

10. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння: $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' + \frac{2y}{x} = 2\frac{\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$$

12. Розв’язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$(1+x^2)y'' - 2xy' = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 3.$$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39$;

2) $y'' + 2y' + 10y = (4 - 8x)e^x$;

3) $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$.

15. Розв’язати задачу Коші: $\qquad y'' + 4y = 4/\cos 2x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

Варіант 3

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}dx$; 2) $\int \frac{5x}{\sqrt{1+x^4}}dx$; 3) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$;

4) $\int \sqrt{3-x}dx$; 5) $\int \frac{dx}{(2x-1)^3}$; 6) $\int \frac{dx}{x^2+4x-12}$;

7) $\int (x-1)e^{2x}dx$; 8) $\int x\operatorname{arctg}(2x+3)dx$; 9) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$;

10) $\int \frac{4x^4+8x^3-1}{(x^2+x)(x+1)}dx$; 11) $\int \frac{(4x-10)dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$; 12) $\sin 3x\cos 4xdx$;

13) $\int \cos^2 3xdx$; 14) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$; 15) $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$;

16) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$; 17) $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^3}dx$.

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$; 2) $\int_0^1 \frac{xdx}{(3+x)^3}$; 3) $\int_1^2 \frac{x^3+1}{x^3+x^2}dx$;

4) $\int_0^{\pi/4} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx$; 5) $\int_0^{\pi/6} \operatorname{tg} 2xdx$; 6) $\int_0^{\pi/2} x^2\cos xdx$.

3. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_1^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$; 2) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg} xdx$.

4. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями:

1) $y=3x^2-1,\quad y=5-3x;$ 2) $\rho=4\sin^2\varphi$.

5. Обчислити площу поверхні, одержаної при обертанні даної кривої навколо полярної осі:

$$\rho=a(1+\cos\varphi)\ \text{(кардіоїда)},\qquad \varphi\in[0;\pi].$$

6. Знайти об’єм тіла, одержаного при обертанні заданої криволінійної трапеції навколо осі OX:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \text{ (циклоїда)} \quad t \in [0; 2\pi].$$

7. Знайти координати центра мас плоскої фігури, обмеженої лініями

$$y = 4 - x^2, \quad y = 0.$$

8. Розв’язати задачу Коші для диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$x\sqrt{1 - y^2}\,dx + y\sqrt{1 - x^2}\,dy = 0, \qquad y(0) = 1.$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$xy' - y = (x + y)\ln\frac{x + y}{x}.$$

10. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$xy' - 2y = x^3 \cos x.$$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5.$$

12. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$yy'' - y'(1 + y') = 0.$$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами: $y'' + 2y' + 10y = 0.$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5;$

2) $y'' + 4y = (7 - 6x)e^x;$

3) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos x.$

15. Розв’язати задачу Коші:

$$y'' - 2y' = 4e^{4x} \cos e^{2x}, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 4

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \sqrt{9-x^2}dx$; 2) $\int \frac{dx}{1+\cos 2x}$; 3) $\int \frac{2xdx}{x^4+3}$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$; 5) $\int \frac{\ln \mathrm{tg}\, x}{\sin 2x}dx$; 6) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+3x-1}}$;

7) $\int (x+5)\ln xdx$; 8) $\int (x+1)2^x dx$; 9) $\int \frac{2x^4-9x^2-1}{x^3-7x-6}dx$;

10) $\int \frac{4x^4+8x^3-1}{(x^2-1)(x+1)}dx$; 11) $\int \frac{(x^2+23)dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$; 12) $\int \mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}dx$;

13) $\int \sin^5 x\cos^3 xdx$; 14) $\int \frac{dx}{4+\cos x}$; 15) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$;

16) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}dx$; 17) $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^3}}$.

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_1^e \frac{\ln^5 x}{x}dx$; 2) $\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+1}dx$; 3) $\int_0^{\pi/3} \sin x\cos 2xdx$;

4) $\int_{-2}^{-\sqrt[3]{3}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$; 5) $\int_0^2 (x+1)\ln(x+1)dx$; 6) $\int_{-2}^{-1} \sqrt{2-7x}dx$.

3. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$; 2) $\int_1^2 \frac{xdx}{x^2-1}$.

4. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями:

1) $y=\frac{2}{x^2-1}$, $y=2-x$; 2) $\rho=2\sqrt{3}\cos\varphi$, $\rho=2\sin\varphi$.

5. Обчислити площу поверхні, одержаної при обертанні даної кривої навколо осі OX: $y=-\frac{1}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}$, $x\in[1;e]$.

6. Знайти об’єм тіла, одержаного при обертанні заданого криволінійного сектора навколо полярної осі:

$$\rho = a\sqrt{\cos\varphi}, \qquad \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

7. Знайти координати центра мас дуги першої арки циклоїди:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad t \in [0; 2\pi].$$

8. Розв’язати задачу Коші для диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y \ln y dx + y dy = 0, \quad y(1) = 1.$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$(y + \sqrt{xy})dx = xdy.$$

10. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння: $(2x - y^2)y' = 2y.$

11. Розв’язати задачу Коші для диференціального рівняння Бернуллі:

$$y' + y = e^{x/2}\sqrt{y}, \quad y(0) = \frac{9}{4}.$$

12. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку: $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x.$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами: $y'' + 4y = 0.$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y''' - y'' = 6x^2 + 3x;$

2) $y'' - 7y' + 10y = (1 - 2x)e^{-x};$

3) $y'' - 4y' + 8y = e^x(3\sin x + 5\cos x).$

15. Розв’язати задачу Коші:

$$y'' + 4y = 4\sin^2 2x / \cos 2x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 5

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int \frac{e^x}{e^x+4}dx$; 3) $\int x^2 \sin x^3 dx$;

4) $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}dx$; 5) $\int \frac{dx}{(5x-6)^3 dx}$; 6) $\int \frac{x+5}{x^2+5x+7}dx$;

7) $\int (x-1)\sin 2x dx$; 8) $\int 2^x \sin x dx$; 9) $\int \frac{2x^4+4x^3+x-1}{x^3+2x^2-x-2}dx$;

10) $\int \frac{2x^4+x^3-x^2-1}{x^3+x^2}dx$; 11) $\int \frac{(2x^2+7x+7)dx}{(x^2+8x+15)(x+1)}$; 12) $\int \operatorname{ctg}(2x-\frac{\pi}{3})dx$;

13) $\int \cos 7x \sin 2x dx$; 14) $\int \frac{dx}{\sin x+5\cos x+5}$; 15) $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$;

16) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$; 17) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$.

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_0^3 \frac{x-1}{2x+3}dx$; 2) $\int_0^{\pi/6} \cos^3 x \sin^5 x dx$; 3) $\int_0^{\pi/12} \operatorname{tg}^2 3x dx$;

4) $\int_2^3 x(x-3)^5 dx$; 5) $\int_{-1/2}^0 x2^{2x+1}dx$; 6) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$.

3. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$; 2) $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$.

4. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями:

1) $x^2-y^2=9, \quad x=5$; 2) $\rho^2=2\sin 2\varphi, \quad \rho=1 \quad (\rho \ge 1)$.

5. Обчислити площу поверхні, одержаної при обертанні даної кривої навколо полярної осі:

$$x=a\cos^3 t, \qquad y=a\sin^3 t \qquad \text{(астроїда)}, \quad t\in[0;\pi].$$

6. Знайти об'єм тіла, одержаного при обертанні заданого криволінійного сектора навколо полярної осі:

$$\rho = a(1+\cos\varphi), \qquad \varphi \in [0;\pi].$$

7. Знайти статичні моменти відносно осей координат відрізка прямої $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, що знаходиться між осями координат.

8. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y' = a^{x+y} \quad (a>0, a\neq 1).$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$xy' = \sqrt{y^2-x^2}+y.$$

10 Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння:

$$y' + y\cos x = \cos x, \qquad y(0)=1.$$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' - 2y\operatorname{tg} x + y^2 \sin x = 0.$$

12. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$xy'' = xy' + y'.$$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''' - 8y = 0.$$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x;$

2) $y'' - 5y' + 6y = (20-16x)e^{-x};$

3) $y'' + 2y' = 6e^{x}(\sin x + \cos x).$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 4y' + 8y = \frac{4e^{2x}}{\cos 2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 6

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int \sqrt{9+x^2}dx$; 3) $\int \frac{(x-4)^2}{\sqrt{x}+2}dx$;

4) $\int e^{2x}\cos e^{2x}dx$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$; 6) $\int \frac{3xdx}{x^2+4x+13}$;

7) $\int x\sin 3xdx$; 8) $\int (x-4)\ln xdx$; 9) $\int \frac{x^4-3x^2-9x-7}{x^3-2x^2-5x+6}dx$;

10) $\int \frac{x^3-4x^2+2x-1}{x^3-x^2}dx$; 11) $\int \frac{(x^2+3x-6)dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$; 12) $\int \sin^2 x\cos^4 \frac{x}{2}dx$;

13) $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$; 14) $\int \frac{\cos x}{\sin^6 x}dx$; 15) $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^3}$;

16) $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4}dx$; 17) $\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4dx$.

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_0^1 (x-5e^x)dx$; 2) $\int_1^{16} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx$; 3) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$;

4) $\int_{-1}^{0} (x-1)(x+1)^5dx$; 5) $\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,xdx$; 6) $\int_{-\pi/12}^{0} \sin(\frac{\pi}{4}-3x)dx$.

3. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$; 2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями:

1) $y=\frac{2}{x^2+1}$, $y=x^2$; 2) $\rho=2-\cos\varphi$, $\rho=\cos\varphi$.

5. Обчислити площу поверхні, одержаної при обертанні даної кривої навколо осі OX: $y=\frac{e^x}{4}+e^{-x}$, $x\in[0;\ln 2]$.

6. Знайти об’єм тіла, одержаного при обертанні заданого криволінійного сектора навколо полярної осі: $\rho = \sin\varphi\cos\varphi$, $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

7. Точка здійснює гармонічні коливання по осі абсцис, її швидкість: $\frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{T}\cos(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0)$, де T, $\varphi_0 -$ сталі. Знайти положення точки в момент t_2, якщо при $t_1 = 0$ вона знаходилась у точці $x = x_1$.

8. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$e^y(1 + x^2)dy - 2x(1 + e^y)dx = 0.$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$xy' = y + x\cos^2 y / x.$$

10. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння: $y' x \ln x - y = 3x^2 \ln^2 x$.

11. Розв’язати задачу Коші для диференціального рівняння Бернуллі:

$$y' + \frac{3x^2 y}{x^2 + 1} = y^2(x^3 + 1)\sin x, \qquad y(0) = 1.$$

12. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку: $y''' = x + \cos x$.

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами: $y^{IV} - y = 0$.

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y^V - y^{IV} = 2x + 3$;

2) $y'' + 5y' + 6y = -4xe^x$;

3) $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 4x$.

15. Розв’язати задачу Коші:

$$y'' - 6y' + 8y = 4e^{6x}\cos e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 7

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{(x+\sqrt{x})^2}{x^3}dx$; 2) $\int \frac{xdx}{x+2}$; 3) $\int e^{\sin x}\cos xdx$;

4) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$; 5) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} 3x}}{\cos^2 3x}dx$; 6) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$;

7) $\int x^2 \cos \omega x dx$; 8) $\int x^2 e^{-x} dx$; 9) $\int \frac{4x^4-14x^3+29x-13}{x^3-4x^2+x+6}dx$;

10) $\int \frac{6x-2x^2-1}{x^3-2x^2+x}dx$; 11) $\int \frac{(4x^2+38)dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$; 12) $\int \sin 3x \cos 5x dx$;

13) $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$; 14) $\int \cos^3 x \sin 2x dx$; 15) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}+1)}$

16) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$; 17) $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^3}$.

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_0^a \sqrt{ax-x^2}dx$; 2) $\int_0^2 \frac{x^2}{x^6-4}dx$; 3) $\int_0^{1/2} x(2x-1)^5 dx$;

4) $\int_e^{e^4} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$; 5) $\int_1^2 x\ln(3-x)dx$; 6) $\int_1^2 \sqrt[3]{5x-5}dx.$

3. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$; 2) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-2x}$.

4. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями:

1) $y=x^2, \quad y=\frac{x^3}{3}$; 2) $\rho^2 = a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi.$

5. Обчислити площу поверхні, одержаної при обертанні даної кривої навколо осі ОХ: $xy=6, \quad x+y=7.$

6. Знайти об’єм тіла, одержаного при обертанні заданого криволінійного сектора навколо полярної осі:

$$\rho = a(2+\cos\varphi), \quad \varphi\in[0;\pi].$$

7. Вертикальний шлюз має форму трапеції. Обчислити тиск води на шлюз, якщо верхня основа його дорівнює 80 м, а нижня – 50 м.

8. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$2x\sqrt{1-y^2} = y'(1+x^2).$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$(x-y)dx + xdy = 0.$$

10. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$(2e^y - x)y' = 1.$$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' - xy = -y^3 e^{-x^2}.$$

12. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$2y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}; \quad y(1) = \frac{\sqrt{2}}{5}, \quad y'(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x;$

2) $y'' - 4y' + 2y = e^{-x}(32x - 32);$

3) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 5x.$

15. Розв’язати задачу Коші:

$$y'' - 4y' + 8y = 4e^{2x}\sin^2 x / \cos 2x; \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 8

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{(x+1)^2}{x\sqrt{x}}dx$; 2) $\int \sqrt{1-2x^2}\,dx$; 3) $\int \frac{x^2dx}{x^3+1}$;

4) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; 5) $\int \frac{\ln^m x}{x}dx$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$;

7) $\int \frac{\ln x dx}{\sqrt[3]{x}}$; 8) $\int 2^x \cos x dx$; 9) $\int \frac{x^4-5x^2+3x-69}{x^3+4x^2+x-6}dx$;

10) $\frac{2x^3+2x^2+4x+3}{x^3+x^2}dx$ 11) $\int \frac{8dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$; 12) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cos 2x}$;

13) $\int \frac{1-\sin x}{\cos x}dx$; 14) $\int \frac{dx}{1+2\cos^2 x}$; 15) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+2}}$;

16) $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$; 17) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}$.

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{xdx}{\cos^2 x}$; 2) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$; 3) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{4-x}}$;

4) $\int\limits_1^2 (x^2+2x-1)\ln x dx$; 5) $\int\limits_0^1 \cos\frac{\pi x}{2}dx$; 6) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

3. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x+1}{x^2+1}dx$; 2) $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{(x-1)^3}$.

4. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями:

1) $y=\ln x, \quad y=0, \quad x=e$; 2) $\rho = 3\sin\varphi, \quad \rho=\sin 5\varphi$.

5. Обчислити площу поверхні, одержаної при обертанні даної кривої навколо осі OX:

$$y=(2x)^{-1}+\frac{x^3}{6}; \quad x\in[2;3].$$

6. Знайти об’єм тіла, одержаного при обертанні заданого криволінійного сектора навколо полярної осі: $\rho = \dfrac{1}{1+\cos\varphi}$, $\varphi = 0$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

7. Знайти тиск води на вертикальний параболічний сегмент, основа якого довжиною 4 м знаходиться на поверхні води, а вершина – на глибині 4 м.

8. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$e^x \sin^3 y + (1+e^{2x})y'\cos y = 0.$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння: $xy' = y(\ln y - \ln x)$.

10. Розв’язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння:

$$y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0, \qquad y(0) = 0.$$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y'x + y = -xy^2.$$

12. Розв’язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y'' = \frac{1}{x}, \qquad y(1) = y'(1) = 1.$$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами: $4y''+4y'+y=0$.

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2$;

2) $y'' + y = 4xe^x$;

3) $y'' + y = 2\cos 7x - 3\sin 7x$.

15. Розв’язати задачу Коші:

$$y''+4y'+8y = 4e^{-2x}/\cos 2x, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 9

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$; 3) $\int e^{-x^3}x^2 dx$;

4) $\int \frac{xdx}{x^3-1}$; 5) $\int 2^x \cos 2^x dx$; 6) $\int \frac{x+1}{x^2-3x+5}dx$;

7) $\int (x^2+1)2^x dx$; 8) $\int \ln(x^2+1)dx$; 9) $\int \frac{x^4-5x^2-23x+38}{x^3-3x^2-4x+12}dx$;

10) $\int \frac{x^3-4x+5}{(x^2-1)(x-1)}dx$; 11) $\int \frac{(2x^2+4x+20)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}$; 12) $\sin 2x \cos 5x dx$;

13) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$; 14) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$; 15) $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$;

16) $\int x^3\sqrt{1-x^2}dx$; 17) $\int x^2 \cdot \sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx$.

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_1^4 \frac{dy}{(1+\sqrt{y})^4}$; 2) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2+3}$; 3) $\int_0^1 \frac{dt}{1+e^t}$;

4) $\int_0^1 e^x(x-1)dx$; 5) $\int_5^6 \frac{dx}{x^2+2x}$; 6) $\int_0^{\pi/4} \sin 2x dx$.

3. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_3^{\infty} \frac{dx}{2-x}$; 2) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

4. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями:

1) $y=x^2,\quad y=4x;$ 2) $\rho = 1+\sqrt{2}\sin\varphi.$

5. Обчислити площу поверхні, одержаної при обертанні даної кривої навколо осі OX:

$$y=\operatorname{ch} x,\quad x\in[-a;a].$$

6. Знайти об’єм тіла, одержаного при обертанні заданої криволінійної трапеції навколо осі OX:

$$x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t,\quad t\in[0;\pi].$$

7. Знайти координати центра мас дуги астроїди $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,$ що знаходиться у першому квадранті.

8. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y^2 \sin x dx + \cos^2 x \ln y dy = 0.$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$x^2 dy = (y^2 - xy + x^2)dx.$$

10. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$y' + \frac{2y}{x} = x^3.$$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$xdy = (x^5 y^2 - 2y)dx.$$

12. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$xy'' = y',\ \ y'(0) = y(0) = 0.$$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x;$

2) $y'' + 2y' = (8x - 12)e^x;$

3) $y'' + 2y' + 5y = -\cos x.$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 10y' + 24y = 4e^{2x}\cos e^{2x}, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 10

1. Знайти інтеграли:

1) $\int (e^x+1)^2\,dx$; 2) $\int \frac{2x-1}{x-2}dx$; 3) $\int \frac{x^4}{\sqrt{4+x^5}}dx$;

4) $\int \frac{\operatorname{arctg}^5 x}{1+x^2}dx$; 5) $\int \frac{x^2dx}{\sin^2 x^3}$; 6) $\int \frac{3x-1}{x^2+2x+17}dx$;

7) $\int 2^x \cos x dx$; 8) $\int \frac{\lg x}{x^3}dx$; 9) $\int \frac{x^4-5x^2-4}{x^3-3x^2-x+3}dx$;

10) $\int \frac{3x^2+2}{x(x+1)^2}dx$; 11) $\int \frac{(5x+13)dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$; 12) $\int \sin^5\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}\,dx$;

13) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$; 14) $\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$; 15) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

16) $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)}}{x^4}dx$; 17) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$.

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_1^{10} x\lg x dx$; 2) $\int_1^2 (x+1)^2\sqrt{x-1}dx$; 3) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}dx$;

4) $\int_0^{\pi/4} e^{\operatorname{tg} x}\frac{dx}{\cos^2 x}$; 5) $\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^5 x dx$; 6) $\int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

3. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_0^{\infty} x\cos 2x dx$; 2) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями.

1) $y=\operatorname{ch}x,\quad y=0,\quad x=a,\quad x=b$; 2) $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$.

5. Обчислити площу поверхні, одержаної при обертанні даної кривої навколо осі OX:

$$x=2t,\quad y=t^{-1}+\frac{t^3}{3},\quad t\in[1;2].$$

6. Знайти об’єм тіла, одержаного при обертанні заданої криволінійної трапеції навколо осі OX:

$$y = \sin x, \qquad y = 0, \qquad x \in [0; \pi].$$

7. Знайти момент інерції кола радіуса R відносно діаметра.

8. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\operatorname{tg} x \sin^2 y dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y dy = 0.$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$2x^2 y' = x^2 + y^2.$$

10. Розв’язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння:

$$y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0.$$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' = xy + x^3 y^2.$$

12. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$(y'')^2 = y'.$$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''' - y'' - y' + y = 0.$$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4$;

2) $y'' - 4y' + 4y = -e^x (8x + 4)$;

3) $y'' - 4y' + 8y = e^x (2 \sin x - \cos x)$.

15. Розв’язати задачу Коші:

$$y'' + 4y' + 8y = 4e^{-2x} \sin^2 2x / \cos 2x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 11

1.Знайти інтеграли:

1) $\int \dfrac{(1+2x^2)}{x^2(1+x^2)}dx;$ 2) $\int \dfrac{x^3}{(x-1)^{12}}dx;$ 3) $\int \dfrac{dx}{x\ln^3 x};$

4) $\int \dfrac{xdx}{3x^2+1};$ 5) $\int \sin(2x-3)dx;$ 6) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{7-2x^2+12x}};$

7) $\int x^2 e^{-2x}dx;$ 8) $\int \mathrm{arctg}\sqrt{x}dx;$ 9) $\int \dfrac{x^4-7x^2+x-1}{x^3-7x+6}dx;$

10) $\int \dfrac{(x+5)dx}{x^3-x^2-x+1};$ 11) $\int \dfrac{4x^2+x+10}{x^3+8}dx;$ 12) $\int \cos 5x \sin 11x dx;$

13) $\int \dfrac{2-\sin x}{2+\sin x}dx;$ 14) $\int \dfrac{dx}{\cos^4 x \sin^6 x};$ 15) $\int \dfrac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx;$

16) $\int \dfrac{dx}{(4+x^2)^3};$ 17) $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx.$

2.Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int\limits_0^1 \dfrac{\sqrt{y}}{1+y}dy;$ 2) $\int\limits_0^{e-1} x\ln(x+1)dx;$ 3) $\int\limits_0^2 e^{2x-2}dx;$

4) $\int\limits_0^{\pi/6} \cos^2 2tdt;$ 5) $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{dt}{1+\cos t};$ 6) $\int\limits_0^1 x\sqrt{1+x}dx.$

3.Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int\limits_2^{\infty} \dfrac{\ln x}{x}dx;$ 2) $\int\limits_1^2 \dfrac{xdx}{\sqrt{x-1}}.$

4.Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями; виконати рисунок:

1) $y=\mathrm{arctg}x,\ \ y=\dfrac{\pi x}{4};$ 2) $\rho = 2\sin 6\varphi.$

5. Обчислити площу поверхні, одержаної при обертанні даної кривої навколо осі OX: $y=\dfrac{x^{-2}}{4}+\dfrac{x^4}{8},\ \ x \in [1;2].$

6. Знайти об'єм тіла, одержаного при обертанні заданої криволінійної трапеції навколо осі OX: $y^2 = 2px,\ x = p/2$.

7. Знайти координати центра мас половини круга: $x^2 + y^2 = R^2,\ \ y \geq 0$.

8. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$xy' - y = y^3.$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$(4x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0.$$

10. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$xy' - y = x^2 \cos x.$$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$yy' - 4x - y^2\sqrt{x} = 0$$

12. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$xy'' + y' + x = 0,\ \ y(0) = y'(0) = 0.$$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y^{IV} + y''' = x$;

2) $y'' + 6y' + 13y = (16x + 20)e^x$;

3) $y'' + 2y' = 3e^x(\sin x + \cos x)$.

15. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 8y' + 20y = 4e^{4x} / \cos 2x,\ \ y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 12

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}}dx;$ 2) $\int x(2x+5)^{10}dx;$ 3) $\int \sin(\lg x)\frac{dx}{x};$

4) $\int x\cdot 7^{x^2}dx;$ 5) $\int \frac{dx}{\arccos 3x\sqrt{1-x^2}};$ 6) $\int \frac{x}{x^2-7x+13}dx;$

7) $\int (x^2+3)8^{-x}dx;$ 8) $\int 3^x \cos x dx;$ 9) $\int \frac{x^4-13x^2-3x-6}{x^3-x^2-10x-8}dx;$

10) $\int \frac{3x^2-7x+2}{(x^2-x)(x-1)}dx;$ 11) $\int \frac{(4x^2+7x+5)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)};$

12) $\int \sin(x-\frac{\pi}{4})\cos(5x+\frac{\pi}{4})dx;$ 13) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x};$

14) $\int \sin^3 6x\cos 6x dx;$ 15) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx;$ 16) $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^4}dx;$ 17) $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}dx$

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx;$ 2) $\int_{\ln 4}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x-e^{-x}};$ 3) $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx;$

4) $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x dx;$ 5) $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx;$ 6) $\int_2^4 \frac{dx}{4x^2-9}.$

3. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^3};$ 2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

4. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями, виконати рисунок:

1) $y=e^x,\ x=0, y=e;$ 2) $\rho = 2\cos\varphi,\ \rho=1,\ (\rho \ge 1).$

5. Обчислити площу поверхні, одержаної при обертанні даної кривої навколо осі OX: $y = x^{-1} + x^3/12,\ x \in [2; 2\sqrt{3}].$

6. Знайти об’єм тіла, одержаного при обертанні заданої криволінійної трапеції навколо осі OX: $y = 1 - x^2$, $y = 0$.

7. Швидкість тіла, кинутого вертикально вгору з початковою швидкістю $V_0 = 29{,}4$ м/с, визначається за формулою: $V = V_0 - gt$, де $g = 9{,}8$ м/с^2. На якій відстані від початкового положення буде знаходитися тіло через $t = 5$ с?

8. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$xyy' = 1 - x^2.$$

9. Розв’язати задачу Коші для однорідного диференціального рівняння:

$$xy' = y(1 + \ln y/x), \; y(1) = e^{-1/2}.$$

10. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$x^2 y^2 y' + xy^3 = 1.$$

12. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y'' - 2\mathrm{ctg}x y' = \sin^3 x.$$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 4y' + 8y = 0.$$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2$;

2) $y'' + 2y' + 5y = (8x - 14)e^{-x}$;

3) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 4x$.

15. Розв’язати задачу Коші: $y'' + 2y' = 4e^{2x} \cos e^{2x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Варіант 13

1.Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{xdx}{x+3}$;　　2) $\int \frac{x-\sqrt{\text{arctg}2x}}{1-4x^2}dx$;　　3) $\int \frac{1+\sin 5x}{\cos^2 5x}dx$;

4) $\int \frac{dx}{(2x+7)^7}$;　　5) $\int e^{-(x^2+1)}xdx$;　　6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$;

7) $\int x^2 \cos xdx$;　　8) $\int x\ln(x^2-1)dx$;　　9) $\int \frac{x^4-9x^2+14}{x^3+x^2-14x-24}dx$;

10) $\int \frac{2x^3+3x^2+x+2}{x^3+x^2}dx$;　　11) $\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3-1}dx$;　　12) $\int \cos x\cos 5xdx$;

13) $\int \frac{dx}{2+\cos 2x}$;　　14) $\int \frac{1+8x}{2+\sin^2 x}dx$;　　15) $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$;

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$;　　17) $\int \frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{x}dx$.

2.Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int\limits_2^3 \frac{xdx}{(x-1)^{10}}$;　　2) $\int\limits_0^1 x^2e^{-2x}dx$;　　3) $\int\limits_6^7 \frac{dt}{t^2-25}$;

4) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+4}dx$;　　5) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 xdx$;　　6) $\int\limits_1^e \frac{\sqrt{\ln x}dx}{x}$.

3.Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x}$;　　2) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{x-2}$.

4. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями; виконати рисунок:

1) $x=2y^2+3y-5,\ x=1-y^2$;　　2) $\rho^2=a^2\sin 4\varphi$.

5. Обчислити площу поверхні, одержаної при обертанні даної кривої навколо осі: $y=x^{-2}/8+x^4/4,\ x\,\epsilon\,[1;2]$.

6. Знайти об'єм тіла, одержаного при обертанні заданої криволінійної трапеції навколо осі OX: $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

7. Ракетний снаряд піднімається вертикально вгору, втрачаючи під час руху вагу. Його прискорення обчислюють за формулою $f = A/(a - bt), (a - bt > 0)$. Знайти швидкість снаряда в момент часу t, якщо початкова швидкість дорівнює нулю.

8. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$3e^x \mathrm{tg} y dx + (1 - e^x)\sec^2 y dy = 0.$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$y' = e^{y/x} + y/x.$$

10. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$y' \cos x + y = 1 - \sin x.$$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі: $y' + y = x\sqrt{y}$.

12. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y'' = (y')^2 - y,\ y(1) = -\frac{1}{4},\ y'(1) = \frac{1}{2}.$$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3$;

2) $y'' - 5y' = (8x + 6)e^x$;

3) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 8x$.

15. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 8y' + 20y = 4e^{4x}\sin^2 2x / \cos 2x,\ y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 14

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{x^2+\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$; 2) $\int \frac{2x+1}{x^2-9}dx$; 3) $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}dx$;

4) $\int 2^{\ln x}\frac{dx}{x}$; 5) $\int x^2(1+x^3)dx$; 6) $\int \sqrt{x^2-3x+1}dx$;

7) $\int x^2 a^x dx$; 8) $\int e^{2x}\sin x dx$; 9) $\int \frac{x^4-4x^2+4x+10}{x^3+3x^2+2x}dx$;

10) $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$; 11) $\int \frac{6x}{x^3-1}$; 12) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx$;

13) $\int \sin^3 5x dx$; 14) $\int \frac{dx}{1-\operatorname{tg}x}$; 15) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$;

16) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$; 17) $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}dx$.

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int\limits_9^{25}\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$; 2) $\int\limits_5^{10}x\sqrt{x-1}dx$; 3) $\int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2}\frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

4) $\int\limits_0^1\frac{e^x dx}{e^x+1}$; 5) $\int\limits_0^{\pi/6}x\cos 3x dx$; 6) $\int\limits_1^3\frac{dx}{x^2-2x+5}$.

3. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int\limits_0^{\infty}\frac{2xdx}{x^2+1}$; 2) $\int\limits_1^{e}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

4. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями; виконати рисунок:

1) $x=3y^2-1,\ x=5-3y$; 2) $\rho=2\cos 3\varphi,\ \rho=1,\ (\rho\ge 1)$.

5. Обчислити площу поверхні, одержаної при обертанні даної кривої навколо осі OX: $y=\ln x-\frac{x^2}{8},\ x\in[1;2]$.

6. Знайти об’єм тіла, одержаного при обертанні заданої криволінійної трапеції навколо осі OX: $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},\ y = 0.$

7. Швидкість тіла визначається за формулою: $V = \sqrt{2t + 3}$ м/с. Знайти шлях, який пройшло тіло за перші 3 с після початку руху.

8. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y'\,\mathrm{tg}x = y.$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$xdy = (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx.$$

10. Розв’язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння:

$$xy' + y - e^x = 0,\ \ y(1) = 2.$$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$2xyy' - y^2 + x = 0.$$

12. Розв’язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$yy'' + (y')^2 = y^4,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами: $y'' + 4y' + 13y = 0.$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1;$

2) $y'' - 6y' = (16x + 24)e^x;$

3) $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x.$

15. Розв’язати задачу Коші:

$$y'' + 8y' + 20y = 4e^{-4x}/\cos 2x,\ \ y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 15

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{(\sqrt{x}+x^3)^3}{2\sqrt[3]{x}}dx;$ 2) $\int 2^x 3^x dx;$ 3) $\int e^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^2};$

4) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x};$ 5) $\int x^2(x-1)^5 dx;$ 6) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{5x^2-1}}dx;$

7) $\int 3^x \cos x dx;$ 8) $\int x\sin x\cos x dx;$ 9) $\int \frac{x^4+5x^2+19x-4}{x^3+x^2-2x}dx;$

10) $\int \frac{2x^2+1}{x^3-2x^2+x}dx;$ 11) $\frac{(5x^2+17x+36)}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx;$

12) $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{5}dx;$ 13) $\int \frac{\sin^4 x dx}{2\cos^2 x-3};$ 14) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x};$

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}};$ 16) $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}dx;$ 17) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{\sqrt{1+x^3}}}.$

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int\limits_{-0,5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}};$ 2) $\int\limits_{1}^{2}(x+1)(x-5)^5 dx;$ 3) $\int\limits_{1/\pi}^{2/\pi} \sin\frac{1}{t}\frac{dt}{t^2};$

4) $\int\limits_{4}^{9} \frac{\sqrt{z}dx}{\sqrt{z}-1};$ 5) $\int\limits_{0}^{\pi} 2^x \cos x dx;$ 6) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dt}{1-\cos t}.$

3.Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}};$ 2) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}.$

4. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями, виконати рисунок:

1) $y=2x^2-5,\ \ y=1-3x-x^2;$ 2) $\rho=4\sin 2\varphi.$

5. Обчислити площу поверхні, одержаної при обертанні даної кривої навколо осі OX:

$$y=\frac{x^3-5}{5\sqrt{x}},\ x\,\epsilon[1;4].$$

6. Знайти об'єм тіла, одержаного при заданого криволінійного сектора навколо полярної осі: $\rho=\dfrac{2}{1+0{,}5\cos\varphi},\ \varphi\,\epsilon[0;\pi].$

7. Знайти статичні моменти відносно осей координат відрізка прямої $3x-y-3=0,$ який відсікається осями координат.

8. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(1+e^x)yy'=e^x,\ \ y(0)=1.$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння: $yy'=2y-x.$

10. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$(1+x^2)y'+y=\mathrm{arctg}x.$$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$xy+y=y^2\ln x.$$

12. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку: $y''=2x\ln x.$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами: $y''-2y'+2y=0.$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y^{IV}+y'''=12x+6;$

2) $y''-6y'+9y=4(1-x)e^{-x};$

3) $y''+y=2\cos 4x+3\sin 4x.$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$y''+6y'+8y=4\cos e^{2x},\ y(0)=y'(0)=0.$$

Варіант 16

1.Знайти інтеграли:

1) $\int x^3(2x+\sqrt{x})^2\,dx;$ 2) $\int (x-1)(x+2)^{10}dx;$ 3) $\int \frac{3^x\,dx}{\sqrt{9^x-1}};$

4) $\int 2^{\mathrm{ctg}x}\frac{dx}{\sin^2 x};$ 5) $\int e^x\cos e^x dx;$ 6) $\int \sqrt{x^2-4x+2}dx;$

7) $\int \mathrm{arctg}\sqrt{x}dx;$ 8) $\int e^{2x}\cos x dx;$ 9) $\int \frac{x^4+5x^3+6x^2+6}{x^3+5x^2+6x}dx;$

10) $\int \frac{2x^3+5x^2-1}{x^3+x^2}dx;$ 11) $\int \frac{(2x+22)dx}{(x-1)^2(x^2-2x+10)};$ 12) $\int \frac{dx}{4+4\cos 2x};$

13) $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx;$ 14) $\int \sqrt{\frac{\sin x}{\cos^9 x}}dx;$ 15) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}};$

16) $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}dx;$ 17) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}.$

2.Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_0^1 x\cos x^2 dx;$ 2) $\int_2^4 xe^{x/2}dx;$ 3) $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{y}dy}{1+\sqrt[3]{y^2}};$

4) $\int_2^3 (x+1)\sqrt{x-2}dx;$ 5) $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2};$ 6) $\int_1^3 \frac{xdx}{3x+1}.$

3.Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2+2x+x^2};$ 2) $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^3 x}.$

4. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями; виконати рисунок: 1) $y^2-x^2=9,\ y=5;$ 2) $\rho=2\sin 5\varphi.$

5.Обчислити площу поверхні, одержаної при обертанні даної кривої навколо осі OX: $y=(x^3-5)/5\sqrt{x}\ \ x\,\epsilon[1;4].$

6.Знайти об’єм тіла, одержаного при обертанні заданого криволінійного сектора навколо полярної осі: $\rho = a\varphi \ (a > 0),\ \varphi \in [0;\pi]$.

7. Обчислити роботу, яку треба затратити, щоб викачати масло через верхній отвір із цистерни, що має форму циліндра з горизонтальною віссю, якщо питома вага масла γ, довжина цистерни L, радіус основи R (див. примітку до варіанта 17).

8. Розв’язати задачу Коші для диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(xy^2 + x)dx + (x^2 y - y)dy = 0,\ \ y(0) = 1.$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$xy'\cos y/x = y\cos y/x - x.$$

10. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$y'\cos^2 x + y = \mathrm{tg}x.$$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі: $y' = \dfrac{4}{x}y + x\sqrt{y}.$

12. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку: $y'' + \dfrac{2}{1-y}(y')^2 = 0.$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами: $y'' - 4y' + 2y = 0.$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1;$

2) $y'' + y' - 6y = (20x + 14)e^{-2x};$

3) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 6x.$

15. Розв’язати задачу Коші:

$$y'' + 8y' + 20y = 4e^{-4x}\sin^2 2x/\cos 2x,\ \ y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 17

1.Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}+\sqrt[5]{x}}{x^2}dx;$ 2) $\int \frac{x^2}{x^2+3};$ 3) $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-3x^2}};$

4) $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx;$ 5) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx;$ 6) $\int \frac{dx}{3x^2-x+1};$

7) $\int \arccos 2xdx;$ 8) $\int x^2 \sin 3xdx;$ 9) $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx;$

10) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx;$ 11) $\int \frac{(3x+13)}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx;$ 12) $\int \cos x \cos 9xdx;$

13) $\int \frac{\sin^5 xdx}{\cos^6 x};$ 14) $\int \frac{dx}{3+5\cos x};$

15) $\int \frac{dx}{(\sqrt{x+4}-\sqrt[3]{x+4})\sqrt[6]{(x+4)^5}};$ 16) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx;$ 17) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx.$

2.Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{xdx}{\cos^2 x};$ 2) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+1};$ 3) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^2-1};$

4) $\int\limits_1^e \ln xdx;$ 5) $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx;$ 6) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}.$

3.Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}};$ 2) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$

4. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями, виконати рисунок:

1) $(y-2)^2=x-1,\ y=0,\ x-2y+4=0;$ 2) $\rho=a(1+\cos\varphi)$ (кардіоїда).

5.Обчислити довжину дуги даної кривої:

$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ (циклоїда), $t \in [0; 2\pi].$

6. Знайти об'єм тіла, одержаного при обертанні заданої криволінійної трапеції навколо осі OX: $x = t^3$, $y = t^2$, $y = 0, |x| = 1$.

7. Обчислити роботу для викачування масла з вертикального циліндричного резервуара, що має висоту $H = 10$ м і радіус основи $R = 3$ м. Густина масла $\rho = 0{,}9$ г/см^3.

Примітка: При викачуванні шару рідини нескінченно малої товщини робота дорівнює добутку маси шару, висоти, на яку його треба підняти, та прискорення вільного падіння.

8. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$xydx + (x+1)dy = 0.$$

9. Розв'язати задачу Коші для однорідного диференціального рівняння:

$$xy' - y + x\,\mathrm{tg}(\frac{y}{x}),\ \ y(1) = \frac{\pi}{2}.$$

10. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння: $y + y\mathrm{tg}x + \sec x$.

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі: $y' + 2xy = 2xy^2$.

12. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку: $xy'' + y' = 0$.

13. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y'' - 7y' + 10y = 0.$$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y'' - 4y' + 4y = x^2$;

2) $y'' - 3y' + 2y = (15x - 12)e^{-x}$;

3) $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$.

15. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + y = 1/\cos x,\ \ y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 18

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{z^2}{z^2-1}dz;$ 2) $\int \frac{dx}{16-4x^2};$ 3) $\int 5^{3x+1}dx;$

4) $\int \frac{dx}{x\ln^3 x};$ 5) $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}dx;$ 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}};$

7) $\int x^2 \arccos x dx;$ 8) $\int x\sin^2 x dx;$ 9) $\int \frac{3x^4+7x^3-11x^2-14x+13}{x^3+2x^2-5x-6}dx;$

10) $\int \frac{x^3-2x^2-2x+1}{x^3-x^2}dx;$ 11) $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8};$ 12) $\int \sin 2x \sin 7x dx;$

13) $\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos^2 x}dx;$ 14) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x};$ 15) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{(x-1)^3};$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+1}};$ 17) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x^3})^{\frac{1}{3}}}.$

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_1^4 \frac{dy}{(1+\sqrt{y})^2};$ 2) $\int_0^1 x(x-7)^7 dx;$ 3) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx;$

4) $\int_1^2 \frac{dx}{25x^2-16};$ 5) $\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}};$ 6) $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx.$

3. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_0^{\infty} te^{-t^2}dt;$ 2) $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^3}.$

4. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями, виконати рисунок:

1) $y=\frac{1}{x\sqrt{x}},\ y=0,\ x=1;$

2) $\rho=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t)$, (циклоїда), $t\,\epsilon\left[0;2\pi\right].$

5. Обчислити довжину дуги даної кривої:

$$\rho = a(1+\cos\varphi),\ \text{(кардіоїда)},\ \varphi \in [0;\pi].$$

6. Знайти об’єм тіла, одержаного при обертанні заданого криволінійного сектора навколо полярної осі:

$$\rho = a(1+\cos\varphi).$$

7. Знайти момент інерції дуги кривої $y = e^x (0 \le x \le \frac{1}{2})$ відносно осі ОХ.

8. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\sqrt{y^2+1}dx = xydy.$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$xy\sin(y/x) + x = y\sin(y/x).$$

10. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння: $x^2 + xy' = y.$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$3xy^2y' - 2y^3 = x^2.$$

12. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y'' = 1 + (y')^2.$$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами: $y''+3y' = 0.$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y''-8y'+7y = 14;$

2) $y''-2y' = (1-2x)e^x;$

3) $y''-4y'+4y = -e^{-2x}\sin 6x.$

15. Розв’язати задачу Коші:

$$y''-y' = e^{2x}\cos e^x,\ y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 19

1.Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}+\sqrt[5]{x}}{x^2}dx$; 2) $\int (\text{tg}x\text{ctg}x)^2\,dx$; 3) $\int 2^{x^2}\,xdx$;

4) $\int \frac{dx}{(5x-1)^{15}}$; 5) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$;

7) $\int x^2 \ln xdx$; 8) $\int e^{2x}\cos 3xdx$; 9) $\int \frac{5x^4-17x^2-6}{x^3-x^2-2x}dx$;

10) $\int \frac{x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^2-1)}dx$; 11) $\int \frac{(12-6x)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}$; 12) $\int \cos 3x \sin 5xdx$;

13) $\int \sin^{10} x \cos^3 xdx$; 14) $\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$; 15) $\int \frac{x+1+\sqrt{x+2}}{x+3}dx$;

16) $\int \frac{x^2+4}{x}dx$; 17) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

2.Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_0^1 e^{2x-1}dx$; 2) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; 3) $\int_0^1 \ln(1+x)dx$;

4) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$; 5) $\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 xdx$; 6) $\int_0^{\pi/2} \cos^4 xdx$.

3. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_0^{\infty} \frac{dt}{(t+1)^2}$; 2) $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

4. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями, виконати рисунок:

1) $y=\ln x,\ x=e,\ x=e^2,\ y=0$;

2) $\rho = a(2+\cos\varphi)$, (равлик Паскаля).

5. Обчислити довжину дуги даної кривої: $y=-\frac{1}{2}\ln x+\frac{x^2}{4},\ x\,\epsilon[1;e]$.

6. Знайти об’єм тіла, одержаного при обертанні навколо осі OX фігури, обмеженої даними лініями: $y = x,\ \ y = \dfrac{1}{x},\ \ y = 0,\ x = 2.$

7. Знайти роботу, необхідну для розтягування пружини на 10 см, якщо сила 1 Н розтягує її на 1см.

<u>Примітка:</u> Згідно з законом Гука, при розтягуванні пружини сила дорівнює добутку жорсткості пружини *C,* та довжини, на яку пружина була розтягнута.

8. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0,\ \ y(0) = 1.$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'.$$

10. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$(2x + 1)y' = 4x + 2y.$$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$(x^3 + e^y)y' = 3x^2.$$

12. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку: $y^{IV} = x.$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами: $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0.$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y'' - 2y' = x^2 - 1;$

2) $y'' - 2y' + y = (3x + 7)e^{2x};$

3) $y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x).$

15. Розв’язати задачу Коші:

$$y'' + y = \sin^2 x / \cos x,\ \ y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 20

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{xdx}{(x+1)^{10}}$; 2) $\int \cos^2 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{2} dx$; 3) $\int \frac{t^2 dt}{4+t^6}$;

4) $\int \frac{\mathrm{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx$; 5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}} dx$; 6) $\int \frac{xdx}{x^2-4x+5}$;

7) $\int x \mathrm{arctg} x dx$; 8) $\int x 3^{\frac{x}{2}} dx$; 9) $\int \frac{2x^4-8x^2-17x-15}{x^3-2x^2-3x} dx$;

10) $\int \frac{x+2}{x^3-x^2} dx$; 11) $\int \frac{(2x^2+2x+20)}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx$; 12) $\int \sin \frac{3}{4} x \cos \frac{x}{4} dx$;

13) $\int \frac{\sin^3 x dx}{2+\cos^2 x}$; 14) $\int \frac{dx}{2-\sin x}$; 15) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

16) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4} dx$; 17) $\int x(\sqrt{x}+1)^{3/2} dx$.

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 2) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$; 3) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 2x dx$;

4) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$; 5) $\int_{3/2}^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}-1}$; 6) $\int_0^{\pi/4} x \sin x dx$.

3. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$; 2) $\int_0^3 \frac{dx}{x^2-4}$.

4. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями, виконати рисунок:

1) $y = x^{-2/3}, x = -1, x = 1$;

2) $\rho = a \sin 3\varphi, \ \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

5. Обчислити довжину дуги даної кривої:

$$x = a\cos^3 t,\ \ y = a\sin^3 t \ \text{(астроїда)},\ t \in [0;\pi].$$

6. Знайти об'єм тіла, яке утворюється обертанням навколо осі OX фігури, обмеженої даними лініями:

$$x = a\sin t,\ \ y = a\sin 2t\ (0 \le t \le 2\pi).$$

7.Знайти центр мас дуги з кутом 2α кола радіусом R.

8. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y'\mathrm{ctg}x + y = 2\ \ y(0) = -1.$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$xy'\ln(y/x) = x + y\ln(y/x).$$

10. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$xy' - 2y = 2x^4.$$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' + 2xy = y^2 e^{x^2}.$$

12. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку: $xy'' = (1 + 2x^2)y'$.

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами: $y''' - 2y'' = 0$.

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y'' - y' + y = x^3 + 6$;

2) $y'' - y' = (2x + 5)e^{2x}$;

3) $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$.

15. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 2y' + 2y = e^x/\cos x,\ \ y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 21

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{x^2}{x^2-5}dx$; 2) $\int \frac{dx}{1-\cos 2x}$; 3) $\int \frac{tdt}{(t^2-10)^5}$;

4) $\int 2^{\mathrm{tgx}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; 5) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$; 6) $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx$;

7) $\int (x+1)\arcsin x dx$; 8) $\int x\sin 3x dx$; 9) $\int \frac{x^4+4x^3-4x-37}{x^3+2x^2-11x-12}dx$;

10) $\int \frac{4x^2+3x+3}{x^3+2x^2+x}dx$; 11) $\int \frac{(x^3+8x^2+22x+7)dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$; 12) $\int \sin 5x \cos 3x dx$;

13) $\int \cos^3 x \sin^5 x dx$; 14) $\int \frac{dx}{1+4\sin^2 x}$; 15) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx$;

16) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}}$; 17) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}$.

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int\limits_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2}$; 2) $\int\limits_0^{\ln 3} x^2 e^x dx$; 3) $\int\limits_0^{\ln 2} e^x\sqrt{e^x-1}dx$;

4) $\int\limits_1^2 (x-1)(x+3)^5 dx$; 5) $\int\limits_{-1}^1 \frac{y^3}{(y+2)^2}dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi/3} (x+1)\sin x dx$.

3. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int\limits_0^{\infty} e^{-2t}dt$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{(t-1)^2}}$.

4.Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями; виконати рисунок:

1) $x^2-2x-y=0, \quad x+y+2=0$; 2) $\rho = a\varphi, \quad \varphi \in [\varphi_1;\varphi_2]$.

5. Обчислити довжину дуги даної кривої:

$$y=\frac{e^x}{4}+e^{-x}, \quad x\in[0;\ln 2].$$

6. Обчислити площу поверхні, одержаної при обертанні даної кривої навколо полярної осі: $\rho = a\cos^2\varphi.$

7. Швидкість точки, що рухається, дорівнює $te^{-0,01t}$ м/с. Знайти шлях, який пройшла точка за 10 с від початку руху.

8. Розв’язати задачу Коші для диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y'=3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(2)=0.$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$xyy'=y^2+2x^2.$$

10. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$(xy+e^x)dx-xdy=0.$$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y'-2ye^x=2\sqrt{y}e^x.$$

12. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку: $xy''=y'\ln y'/x.$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами: $y''-4y=0.$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y''+8y'=8x;$

2) $y''-4y'+4y=(18x-21)e^{-x};$

3) $y''+2y'+5y=-\sin 2x.$

15. Розв’язати задачу Коші:

$$y''-3y'+2y=e^{3x}\cos e^x, \quad y(0)=y'(0)=0.$$

Варіант 22

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{x^2dx}{1-x^2}$; 2) $\int \frac{\sqrt{\ln x}-3}{x}dx$; 3) $\int 3^{x+5}dx$;

4) $\int x^2e^{x^3}dx$; 5) $\int \sqrt[5]{\mathrm{tg}x}\frac{dx}{\cos^2 x}$; 6) $\int \frac{xdx}{x^2-7x+13}$;

7) $\int (x^2-1)e^x dx$; 8) $\int e^{2x}\sin xdx$; 9) $\int \frac{x^4+6x^3-26x+42}{x^3+3x^2-6x-8}dx$;

10) $\int \frac{x+2}{x^3+x^2}dx$; 11) $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx$; 12) $\int \frac{dx}{1-\sin x}$;

13) $\int \frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}dx$; 14) $\int \frac{\sin^3 xdx}{1+\cos^2 x}$; 15) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$;

16) $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}dx$; 17) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$.

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_{-3}^{0} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$; 2 $\int_{0}^{\pi/4} \cos^2 xdx$; 3) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{2-\sin x}$;

4) $\int_{4}^{9} \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$; 5) $\int_{0}^{\pi/2} x\cos xdx$; 6) $\int_{0}^{1} \ln(x^2+1)dx$.

3. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4}$; 2) $\int_{3}^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

4.Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями, виконати рисунок:

1) $y=6x-x^2, \quad y=0$; 2) $\rho = a/\varphi, \quad \varphi \in [\varphi_1;\varphi_2]$.

5. Обчислити довжину дуги даної кривої:

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\ln x, \quad x \in [1;2].$$

6. Обчислити площу поверхні, одержаної при обертанні даної кривої навколо осі ОХ: $y = (a^2 + x^2)^{-1}, \quad y = 0, \quad x = 2$.

7. Знайти статичний момент дуги еліпса $x = a\cos t, \quad y = b\sin t,$ що знаходиться у першому квадранті відносно ОХ.

8. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$xy' + y = y^2, \quad y(1) = 0{,}5.$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$y' = y/x + \cos y/x.$$

10. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння: $x^2 y' + xy + 1 = 0.$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$2y'\ln x + y/x = y^{-1}\cos x.$$

12. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку: $y'' = (y')^2$.

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами: $y''' + 27y = 0$.

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y'' + 2y' + 2y = 1 + x$;

2) $y'' + 3y' + 2y = (2x - 5)e^x$;

3) $y'' - 4y' + 8y = e^x(5\sin x - 3\cos x)$;

15. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin^2 x / \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 23

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^3}dx$; 2) $\int \frac{dx}{2+3x^2}$; 3) $\int \frac{\arccos^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

4) $\int 3^{\mathrm{tg}x} \frac{dx}{\cos^2 x}$; 5) $\int \frac{1}{x}\sin(\ln x)dx$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}$;

7) $\int (x-3)\ln x dx$; 8) $\int x^2 e^{3x} dx$; 9) $\int \frac{x^4-7x^2+2x+18}{x^3+x^2-6x}dx$;

10) $\int \frac{4x^2dx}{(x^2-2x+1)(x+1)}$; 11) $\int \frac{36dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$; 12) $\int \sin^4 x dx$;

13) $\int \frac{dx}{3\sin x+\cos x}$; 14) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$; 15) $\int \sqrt{x^2+4}dx$;

16) $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}dx$; 17) $\int \sqrt{x^3+x^4}dx$.

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$; 2) $\int_0^1 te^{-t}dt$; 3) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+5}$;

4) $\int_1^{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$; 5) $\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{\sin 1/x}{x^2}dx$; 6) $\int_1^5 \sqrt{x-1}dx$.

3. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2}$; 2) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^3}$.

4.Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями, виконати рисунок:

1) $xy=a$, $y=0$, $x=a$, $x=b$, $(0<a<b)$, 2) $\rho = a\sin 2\varphi$.

5. Обчислити довжину дуги даної кривої:

$$y=(2x)^{-1}+x^3/6, \quad x\in[2;3].$$

6. Обчислити площу поверхні, одержаної при обертанні даної кривої навколо осі OX:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad y = 0, \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

7. Знайти момент інерції півкола $x = a\cos t, \quad y = a\sin t$ відносно осі OX.

8. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$2xyy' + y^2 = 2.$$

9. Розв’язати задачу Коші для однорідного диференціального рівняння:

$$y' = 4 + y/x + (y/x)^2, \quad y(1) = 2.$$

10. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$y = x(y' - x\cos x).$$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$2y'\sin x + y\cos x = y^3 \sin^2 x.$$

12. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$(x+1)y'' - (x+2)y' + x + 2 = 0.$$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$;

2) $y'' - 4y' + 4y = (x-1)e^x$;

3) $y'' + 2y' = e^x(\sin x + \cos x)$.

15. Розв’язати задачу Коші:

$$y'' - 4y' + 5y = e^{2x} / \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 24

1. Знайти інтеграли:

1) $\int x^3 \dfrac{dx}{\sqrt{x-1}}$; 2) $\int \dfrac{\sqrt{x} + x\ln x}{x^2}dx$; 3) $\int \cos xe^{\sin x}dx$;

4) $\int \sqrt[5]{2x-3}dx$; 5) $\int 2^{\mathrm{ctg}x}\dfrac{dx}{\sin^2 x}$; 6) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+3x-1}}$;

7) $\int (x^2+1)e^x dx$; 8) $\int \arcsin xdx$; 9) $\int \dfrac{3x^4-11x^3-9x+12}{x^3-3x^2-4x}dx$;

10) $\int \dfrac{x^3+x^2-2x-1}{x^2-x^3}dx$; 11) $\int \dfrac{(9x-9)dx}{(x+1)(x^2+4x+13)}$; 12) $\int \cos^2 x\sin^2 xdx$;

13) $\int \cos(5x-1)\cos(x+3)dx$; 14) $\int \dfrac{\sin 2x}{3+4\sin^2 x}dx$; 15) $\int \dfrac{dx}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x})^2}$;

16) $\int \dfrac{dx}{(\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+2})\sqrt[6]{x+2}}$; 17) $\int \dfrac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx.$

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \dfrac{dx}{1+\cos x}$; 2) $\int\limits_0^2 (1+xe^{x^2/4})dx$; 3) $\int\limits_0^5 \dfrac{dt}{3t-2}$;

4) $\int\limits_3^8 \dfrac{dx}{1-\sqrt{x+1}}$; 5) $\int\limits_0^1 (x-1)3^x dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos(x/2)\cos(3x/2)dx.$

3. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int\limits_0^{\infty} te^{-t^2}dt$; 2) $\int\limits_{-2}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}.$

4.Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями, виконати рисунок:

1) $y=\sin x$, $x=0$, $x=\pi$, $y=0$; 2) $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

5. Обчислити довжину дуги даної кривої: $y=\mathrm{ch}\, x$, $x\in[-a;a]$.

6. Обчислити площу поверхні, одержаної при обертанні даної кривої навколо полярної осі: $\rho = a\cos^3\varphi$.

7. Знайти тиск води на прямокутний вертикальний шлюз, що має основу

8 м і висоту 6 м.

Примітка: Тиск на горизонтальну пластинку, що має нескінченно малу ширину, дорівнює добутку площі пластинки, глибини її занурення та густини рідини.

8. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y' - 2xy^2 = 2xy.$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$(x^2 + y^2)dx - xydy = 0.$$

10. Розв’язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння:

$$y'\cos x - y\sin x = 2x, \quad y(0) = 0.$$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' - y\cos x = y^2 \cos x.$$

12. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y''' - y''^3 = 0.$$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y = 0.$$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y''' - y' = x^2 + x;$

2) $y'' + 2y' + y = (18x + 21)e^{2x};$

3) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 3x.$

15. Розв’язати задачу Коші:

$$y'' - 5y' + 6y = e^{4x}\cos e^{x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 25

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}dx;$ 2) $\int \mathrm{tg}^2 3x dx;$ 3) $\int e^x \sin(e^x)dx;$

4) $\int x3^{1-x^2}dx;$ 5) $\int \frac{dx}{(x^2+1)\mathrm{arctg}x};$ 6) $\int \frac{x-5}{x^2-2x-3}dx;$

7) $\int (x-1)2^x dx;$ 8) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx;$ 9) $\int \frac{x^4-5x^2-3x-3}{x^3-2x^2-3x}dx;$

10) $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+1}dx;$ 11) $\int \frac{7x-10}{x^3+8}dx;$ 12) $\int \cos^3 x \sin 2x dx;$

13) $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+3};$ 14) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^6 x};$ 15) $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1})^2};$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}};$ 17) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}.$

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1};$ 2) $\int_0^{x/2} \sin(\frac{2\pi}{x}-\varphi_0)dx;$ 3) $\int_0^{\pi/2}\cos^4 x \sin x dx;$

4) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1};$ 5) $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2};$ 6) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} x\sqrt{1+x^2}dx.$

3. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_{-\infty}^0 xe^x dx;$ 2) $\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{x}dx.$

4.Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями, виконати рисунок. Область визначення полярного радіуса $[-\pi/3;\pi/3]\cup[2\pi/3;4\pi/3]$

1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad x=c, \quad (c>a);$ 2) $(x^2+y^2)^2=3x^2-y^2.$

5. Обчислити довжину дуги даної кривої:

$$x=2t, \quad y=t^{-1}+t^3/3, \quad t\in[1;2].$$

6. Обчислити площу поверхні, одержаної при обертанні даної криволінійної трапеції навколо осі OX:

$$y = 2^x, \quad y = 2 - \log_2 x, \quad y = 0.$$

7. Знайти центр мас півкола: $x^2 + y^2 = r^2, \quad y \geq 0.$

8. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$e^{-y}(1 + dy/dx) = 1.$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

10. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$2x(x^2 + y)dx = dy.$$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' + 2y = y^2 e^x.$$

12. Розв’язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y''(x+2)^5 = 1, \quad y(-1) = 1/12, \quad y'(-1) = 1/4.$$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами: $y''' + 2y' + y = 0.$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $3y' + y''' = 6x - 1$;

2) $y'' + 2y' + 5y = (8x + 4)e^x$;

3) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 4x$.

15. Розв’язати задачу Коші:

$$y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\sin^2 x/\cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 26

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \operatorname{tg}^2 \omega x dx$; 2) $\int \frac{dx}{4x^2-1}$; 3) $\int \frac{x-3}{2x+1}dx$;

4) $\int \frac{xdx}{\sqrt{3-x^2}}$; 5) $\int \sin(\ln x)\frac{dx}{x}$; 6) $\int \frac{dx}{x^2+5x-1}$;

7) $\int (x+1)2^x dx$; 8) $\int e^x \cos 2x dx$; 9) $\int \frac{x^4+18x+4}{x^3+x^2-6x-4}dx$;

10) $\int \frac{4x^4+8x^2-x-2}{x(x+1)^2}dx$; 11) $\int \frac{(4x^2+3x+17)dx}{(x+1)(x^2-2x+5)}$; 12) $\int \sin^2 3x dx$;

13) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x}dx$; 14) $\int \frac{dx}{1+5\cos^2 x}$; 15) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$;

16) $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^4}dx$; 17) $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}dx.$

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x/2}$; 2) $\int_{9/4}^{9} \frac{\sqrt{y}dy}{\sqrt{y}-1}$; 3) $\int_{10}^{11} \frac{dx}{x^2+6x}$;

4) $\int_1^2 x\log_2 x dx$; 5) $\int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^6+4}}$; 6) $\int_0^1 e^{4t+1}dt$.

3. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$; 2) $\int_0^2 \frac{xdx}{x^2-1}$.

4. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями:

1) $y^2 = 8x, \quad x-2y-1=0$; 2) $(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = 2(x^2+y^2+xy)$.

5. Обчислити довжину дуги даної кривої: $y = x^{-2}/4 + x^4/8, \quad x \in [1;2]$.

6. Обчислити площу поверхні, одержаної при обертанні даної кривої навколо осі ОУ:

$$x = a\cos^3 t. \quad y = a\sin^3 t.$$

7. Обчислити роботу, яку треба витратити на викачування води, що заповнює півсферичний резервуар радіусом R=10 м.

8. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y' = 10^{x+y}.$$

9. Розв’язати задачу Коші для однорідного диференціального рівняння:

$$xy' = xe^{y/x} + y, \quad y(1) = 0.$$

10. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$(xy' - 1)\ln x = 2y.$$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' = y^4 \cos x + y\text{tgx}.$$

12. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y' y'' = -x.$$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y''' + y' = 5x^2 - 1;$

2) $y'' + 6y' + 13y = -4xe^{x};$

3) $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x.$

15. Розв’язати задачу Коші:

$$y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\cos x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 27

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{1-x}{1+\sqrt{x}}dx$; 2) $\int \frac{x-1}{x^2+3}dx$; 3) $\int x\cos x^2 dx$;

4) $\int \frac{dx}{(5x-1)^{10}}$; 5) $\int \sin^5 x \cos x dx$; 6) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$;

7) $\int e^{2x}\sin x dx$; 8) $\int \mathrm{arctg3x} dx$; 9) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$;

10) $\int \frac{4x-1}{x(x-1)^2}dx$; 11) $\int \frac{(3x+13)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}$; 12) $\int \sin 3x \sin 5x dx$;

13) $\int \cos^2 3x dx$; 14) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$; 15) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

16) $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}dx$; 17) $\int x^3(1+2x^2)^{-3/2}dx$.

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$; 2) $\int_0^1 \frac{x^3dx}{1+x^4}$; 3) $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$;

4) $\int_1^2 (x-1)\ln x dx$; 5) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sec^2 x dx$; 6) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2}$.

3. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$; 2) $\int_0^1 \ln x dx$.

4. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями:

1) $x^2 = 4y, \quad y = \frac{8}{x^2+4}$; 2) $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$ (лемніската Бернуллі).

5. Обчислити довжину дуги даної кривої: $y = x^{-1} + x^3/12, \quad x \in [2;2\sqrt{3}]$.

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

$$z^2 = x^2/4 + y^2/9, \quad z = 2.$$

7. Швидкість точки, що рухається, дорівнює $V = 3t^2 - 2t$ м/с. Знайти шлях, який пройшла точка за 5 с від початку руху.

8. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$ydy/dx + x = 1.$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$(x + 2y)dx - xdy = 0.$$

10. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}.$$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$xy^2y' = x^2 + y^3.$$

12. Розв’язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y''y^3 = 1, \quad y(1/2) = y'(1/2) = 1.$$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0.$$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $7y''' - y'' = 12x;$

2) $y'' + y = (4x+9)e^{2x};$

3) $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x.$

15. Розв’язати задачу Коші:

$$y'' + y' = e^x \cos e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 28

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{(x+\sqrt{x})^2}{x^3}dx;$ 2) $\int \frac{dx}{e^x+1};$ 3) $\int x^2\sqrt[4]{1+x^3}\,dx;$

4) $\int \frac{3^x dx}{4+3^{2x}};$ 5) $\int \frac{t^5+\ln^2 t}{t}dt;$ 6) $\int \frac{x+1}{x^2-6x+8}dx;$

7) $\int (x^2+1)e^x dx;$ 8) $\int \ln(2x-1)dx;$ 9) $\int \frac{2x^4-10x^2-7x-13}{x^3-7x-6}dx;$

10) $\int \frac{3x-x^2-2}{x(x+1)^2}dx;$ 11) $\int \frac{(x^2-5x+40)dx}{(x+2)(x^2-2x+10)};$ 12) $\int \cos 5x\cos x dx;$

13) $\int \sin^2 x\cos^4 x dx;$ 14) $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+4};$ 15) $\int \frac{1+z}{1+\sqrt{z}}dz;$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}};$ 17) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_0^1 \frac{dx}{3x+2};$ 2) $\int_0^{\pi/6} \mathrm{tg}2x dx;$ 3) $\int_0^1 2^x(x+1)dx;$

4) $\int_1^2 x^2(x-1)^5 dx;$ 5) $\int_e^{e^2} \frac{(\ln x)^3}{x}dx;$ 6) $\int_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+1}}.$

3. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_{-\infty}^1 e^{1-x}dx;$ 2) $\int_0^2 \frac{dx}{1-x}.$

4.Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями:

1) $y=x^2;$ $y=2x;$ 2) $x^2+y^2=\sqrt{x^2+y^2}+x$ (кардіоїда).

5. Обчислити довжину дуги даної кривої: $y=x^{-2}/8+x^4/4,\quad x\in[1;2].$

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

$$z = x^2/9 + y^2/4; \quad z = 2.$$

7. Знайти статичні моменти відрізка прямої $x + y = a, \quad (a > 0)$, який знаходиться між осями координат, відносно координатних осей.

8. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0.$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0.$$

10. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$(x + y^2)dy = ydx.$$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$xydy = (y^2 + x)dx.$$

12. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$yy'' + y'^2 = 1, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y^{IV} - 3y''' = 0.$$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1;$

2) $y'' + 2y' = (12x + 16)e^x;$

3) $y''' - 4y' + 8y = e^x(-3\sin x + 4\cos x).$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\sin^2 x/\cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 29

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{x^2}{x^2+4}dx;$ 2) $\int \frac{dx}{4x^2-9};$ 3) $\int \sqrt[5]{x+4}dx;$

4) $\int \sqrt{\text{tgx}}\,\frac{dx}{\cos^2 x};$ 5) $\int \frac{e^x}{\sqrt[3]{e^x+1}}dx;$ 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}};$

7) $\int xe^{-3x}dx;$ 8) $\int \cos(\ln x)dx;$ 9) $\int \frac{x^4-2x^3-11x^2-22}{x^3-13x-12}dx;$

10) $\int \frac{2x^3+1}{x^2(x+1)}dx;$ 11) $\int \cos(\ln x)dx;$ 12) $\int \cos 6x \cos 2x dx;$

13) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx;$ 14) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$ 15) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx;$

16) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx;$ 17) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}.$

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_1^e (x^2+\frac{2}{x})dx;$ 2) $\int_0^1 xe^{-3x}dx;$ 3) $\int_{-3}^0 \frac{x^3dx}{\sqrt{x+4}};$

4) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}};$ 5) $\int_0^1 \frac{xdx}{x+3};$ 6) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(2x+1)^7}.$

3. Обчислити невласні інтеграли або довести розбіжність:

1) $\int_0^\infty x\sin x dx;$ 2) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}.$

4.Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями:

1) $y=x^2-3x,\quad y+3x+4;$ 2) $(x^2+y^2)^{3/2}=2(x^2+y^2-xy).$

5. Обчислити довжину дуги даної кривої:

$$y=\ln x - x^2/8,\quad x\in[1;2].$$

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

$$x^2/4 + y^2/9 - z^2/4 = 1, \quad z = 0, \quad z = 2.$$

7. Знайти статичні моменти частини круга $x^2 + y^2 \le R^2, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$ відносно осей координат.

8. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$xydy + (1 + y^2)dx = 0.$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$(x - y)dx + (x + y)dy = 0.$$

10. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$y' + 2y = e^{-x}.$$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y.$$

12. Розв’язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y'' = xe^x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1;$

2) $y'' - 4y' + 8y = (6x - 11)e^{-x};$

3) $y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x).$

15. Розв’язати задачу Коші:

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}/\cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 30

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{2x+1}{2x^2+1}dx;$ 2) $\int \frac{\sin^2 x + \mathrm{ctg}^3 x}{\sin^2 x}dx;$ 3) $\int \frac{dx}{x\ln^3 x};$

4) $\int xe^{-3x^2+1}dx;$ 5) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x-1}};$ 6) $\int \frac{x+3}{x^2+4x-1}dx;$

7) $\int (x-1)e^{2x}dx;$ 8) $\int 3^x \cos x dx;$ 9) $\int \frac{x^4-4x^3+x^2+x-5}{x^3-2x^2-5x+6}dx;$

10) $\int \frac{x^3-3}{(x-1)(x^2-1)}dx;$ 11) $\int \frac{(x^2-13x+40)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)};$ 12) $\int \sin^3 \varphi \, d\varphi;$

13) $\int \cos^2(2t+1)dt;$ 14) $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx;$ 15) $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx;$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}};$ 17) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}.$

2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \sin x \cos 3x dx;$ 2) $\int\limits_0^1 x\mathrm{arctg} x dx;$ 3) $\int\limits_0^{\pi/4} \cos^2 t dt;$

4) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{(x+2)^5};$ 5) $\int\limits_0^1 \frac{z^2dz}{\sqrt{z^6+4}};$ 6) $\int\limits_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}.$

3. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int\limits_1^\infty e^{-kx}dx, \quad (k>0);$ 2) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

4.Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями:

1) $y = x^2 - x, \quad y^2 = 2x;$ 2) $x = a\cos^3 t, \quad y = b\sin^3 t, \quad t \in [0; 2\pi].$

5. Знайти об’єм тіла, одержаного при обертанні заданої криволінійної трапеції навколо осі OX: $y = \frac{x-5}{5\sqrt{x}}; \quad x \in [1;4].$

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

$$x^2 + y^2/9 + z^2 = 1.$$

7. Знайти тиск води на вертикальну трикутну пластинку, основа a якої знаходиться на поверхні води, а висота пластини дорівнює h.

8. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y'\sin x - y\cos x = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1.$$

9. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$2x^3 y' = y(2x^2 - y^2).$$

10. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$y' - 2xy = 2xe^{x^2}.$$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' + 2y/x = 3x^2 y^{4/3}.$$

12. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$yy'' = (y')^2.$$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 4y' + 3y = 0.$$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y''' - y'' = 6x + 5;$

2) $y'' + 2y' + y = (6x + 5)e^x;$

3) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 5x.$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 3y' + 2y = \cos e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Рекомендована література

1. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : А.С.К., 2005. – 648 с. : іл. – Бібліогр.: с. 632-633. – (Університет. б-ка). – ISBN 966-539-320-0.
2. Вища математика. Збірник задач : навч. посіб. / [В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін.] ; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : А.С.К., 2004. – 480 с. : іл. – (Університет. б-ка). – ISBN 966-319-036-1.
3. Грималюк В. П. Вища математика : навч. посіб. Ч. 1 / Грималюк В. П., Кухарчук М. М., Ясінський В. В. – К. : Віпол, 2004. – 376 с. : іл. 324. – Бібліогр.: с. 370. – (Університет. б-ка). – ISBN 966-622-044-Х.
4. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие / Г. Н. Берман. – [Изд. 22-е, перераб.]. – СПб. : Профессия, 2005. – 432 с. : ил. – ISBN 5-93913-009-7.
5. Сборник задач по математике для втузов Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа / [Болгов В. А., Ефимов А. В., Каракулин А. Ф. и др.] ; под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – [2-е изд.]. – М. : Наука, 1986. – 432 с.
6. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа: учеб. пособие для втузов / [Болгов В. А., Ефимов А. В., Каракулин А. Ф. и др.] ; под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – [2-е изд.]. – М. : Наука, 1986. – 368 с.
7. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для студентов втузов. Ч. 2 / Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. – М. : Высш. школа, 1999. – 416 с.
8. Барановська Г. Г. Вища математика. Звичайні диференціальні рівняння та системи: метод. вказівки до практ. занять [для студ. техн. ф-тів] / Барановська Г. Г. Барановська Л. В. – К. : НТУУ «КПІ», 2007. – 40 с.
9. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: учеб. пособие для вузов / А. Ф. Филиппов. – [7-е изд., стер.] – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1992. – 128 с. – ISBN 5-02-014663-3.

Зміст