МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Розділ: ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ

За напрямом 6.050504 "зварювання"

РЕКОМЕНДОВАНО МЕТОДИЧНОЮ РАДОЮ НТУУ «КПІ»

Київ 2011

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Методичні вказівки

За напрямом 6.050504 “Зварювання”

Укладачі: Довгай В.В., Мельник А.Ф., 2011 р., 51 с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ “КПІ”

(протокол №____ від _________________ 2011 р.)

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Методичні вказівки

За напрямом 6.050504 “Зварювання”

Укладачі: Довгай В.В., Мельник А.Ф.

Рецензент: Голошубов В.І., к. т. н., доц. каф. ЕЗУ

Відповідальний редактор: Кузнецов В.Д., д. т. н., проф. каф. ВДМ

ВСТУП

Методичні вказівки “Інтегральне числення функції однієї змінної” укладені для студентів зварювального факультету з метою забезпечення виконання ними самостійної роботи, що передбачена навчальною програмою з вищої математики та розробленою на її основі робочою навчальною програмою кредитного модуля “Інтегральне числення, диференціальні рівняння та ряди” для напрямку підготовки бакалавра 6.050504 “Зварювання”.

Методичні вказівки складаються з трьох розділів. В першому розділі коротко викладено необхідний теоретичний матеріал стосовно визначеного інтеграла, наведено основні означення відповідних математичних понять та формули для розрахунків. Другий розділ, що має подібну до першого структуру, присвячено визначеному інтегралу та деяким його застосуванням. Для кращого сприйняття матеріалу наводиться достатня кількість малюнків. Обидва розділи містять багато прикладів детального розв’язування типових задач на невизначений та визначений інтеграл. В третьому розділі містяться задачі для самостійної роботи студентів, якою можуть бути домашні завдання, модульні або домашні контрольні роботи.

Підбір матеріалу і його викладення в методичних вказівках “Інтегральне числення функції однієї змінної” дозволяє використовувати їх як для денної, так і для заочної форми навчання студентів.

РОЗДІЛ І. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1. Невизначений інтеграл та його властивості. Таблиця основних невизначених інтегралів

Функція $F(x)$ називається ***первісною*** для функції $f(x)$ на проміжку (a,b) якщо $F(x)$ диференційовна на цьому проміжку та задовольняє умові

$$F'(x) \equiv f(x),\ \ x \in (a,b).$$

Приклади. Згідно з цим означенням маємо:

1. x^3 є первісною для $3x^2$ на $(-\infty, +\infty)$,
2. $\arcsin\sqrt{x}$ є первісною для $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ на $(0, 1)$,
3. $\sin\dfrac{1}{x}$ є первісною для $-\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$ при всіх $x \neq 0$.

Очевидно, коли $F(x)$ – первісна для $f(x)$ на (a,b), то для довільної сталої C функція $F(x)+C$ теж буде первісною для $f(x)$ на цьому ж проміжку. Більше того, вираз $F(x)+C$ повністю визначає множину всіх первісних для $f(x)$ на (a,b). Цей вираз і називається ***невизначеним інтегралом*** від функції $f(x)$ та позначається символом $\int f(x)dx$. Отже за означенням

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

При цьому знаходження $F(x)$ у вигляді елементарної функції називається ***інтегруванням*** $f(x)$.

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, або, що те саме, $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.
2. $\int F'(x)dx = F(x) + C$, або, що те саме, $\int dF(x) = F(x) + C$.

3. Для довільних сталих A, B

$$\int\big(Af(x)+Bg(x)\big)dx = A\int f(x)dx + B\int g(x)dx\,.$$

Цю властивість називають ще властивістю лінійності невизначеного інтеграла.

4. $\int f(\alpha x+\beta)dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)+C$ для довільних сталих значень α та β. $F(x)$ – первісна для $f(x)$ на (a,b).

На основі таблиці похідних основних елементарних функцій та означення невизначеного інтеграла встановлюється наступна ***таблиця основних невизначених інтегралів***

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \ x>0,\ \alpha\neq -1.$ Зокрема $\int dx = x + C$,

$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}+C$, $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}+C$.

2. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C,\ \ a>0,\ \ a\neq 1.$ Зокрема $\int e^x dx = e^x + C$.

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C$.

8. $\int \mathrm{sh}x dx = \mathrm{ch}x + C$.

9. $\int \mathrm{ch}x dx = \mathrm{sh}x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}x + C$.

11. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}x + C$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$, зокрема $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$, зокрема $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x + C$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

15. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C$.

Приклад. Знайти $\int \left(\frac{4}{\sqrt{7x+2}} + 6\cos(5 - 3x) \right) dx$.

Використовуючи першу і п'яту формулу з цієї таблиці та застосовуючи третю і четверту властивість невизначеного інтеграла, маємо

$$\int \left(\frac{4}{\sqrt{7x+2}} + 6\cos(5 - 3x) \right) dx = 4 \cdot \frac{1}{7} \cdot 2\sqrt{7x+2} +$$

$$+ 6 \cdot \left(\frac{1}{-3} \right) \cdot \sin(5 - 3x) + C = \frac{8}{7}\sqrt{7x+2} - 2\sin(5 - 3x) + C.$$

2. Заміна змінної в невизначеному інтегралі та інтегрування частинами

Заміна змінної в невизначеному інтегралі

Якщо функція $\varphi(x)$ неперервна разом із похідною $\varphi'(x)$ на інтервалі (a, b), функція $f(t)$ неперервна в області значень $\varphi(x)$ а $F(t)$ – первісна для $f(t)$ в цій області, то на інтервалі (a, b) має місце наступна ***формула заміни змінної*** в невизначеному інтегралі

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C.$$

Цю формулу можна записати у вигляді $\int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C$, звідки випливає, що таблиця основних невизначених інтегралів буде справедливою як у випадку, коли аргумент x є незалежною змінною, так і у випадку, коли замість нього взяти довільну диференційовану функцію $\varphi(x)$. Застосування у такому вигляді формула заміни змінної в невизначеному інтегралі називається введенням $\varphi'(x)$ під знак диференціала. В більш загальному випадку її застосування описується співвідношеннями

$$\int g(x)dx = \left| \begin{matrix} x = \Phi(t),\ dx = \Phi'(t)dt, \\ t = \varphi(x) \end{matrix} \right| = \int g(\Phi(t))\Phi'(t)dt =$$
$$= \int f(t)dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C,$$

де $x = \Phi(t)$, $t = \varphi(x)$ – взаємно обернені функції, $g(\Phi(t))\Phi'(t) = f(t)$.

<u>Приклади.</u> Знайти інтеграли

$$1) \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx,\ \ 2) \int \frac{dx}{x\ln^2 x},\ \ 3) \int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}.$$

Перші два інтеграли знаходимо введенням під знак диференціала відповідно функцій $\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{1}{x}$ як похідних від $\operatorname{arctg} x$ та $\ln x$

$$1) \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx = \int \sqrt{\operatorname{arctg} x}\, d(\operatorname{arctg} x) = \frac{2\operatorname{arctg}^{\frac{3}{2}} x}{3} + C = \frac{2\sqrt{\operatorname{arctg}^3 x}}{3} + C,$$

$$2) \int \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}. = -\frac{1}{\ln x} + C.$$

До третього інтеграла застосовуємо формулу заміни змінної наступним чином

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \left| \begin{matrix} \sqrt{e^x+1} = t,\ e^x = t^2 - 1, \\ x = \ln(t^2-1),\ dx = \dfrac{2tdt}{t^2-1} \end{matrix} \right| = \int \frac{2tdt}{t(t^2-1)} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} =$$
$$= -2 \cdot \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \ln\left|\frac{1-\sqrt{e^x+1}}{1+\sqrt{e^x+1}}\right| + C.$$

<u>Інтегрування частинами</u>

Нехай функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ є неперервними разом із своїми похідними на інтервалі (a, b). Тоді на цьому інтервалі буде справедливою така ***формула інтегрування частинами*** для невизначеного інтеграла

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

При використанні даної формули у кожному конкретному випадку функції u та v слід підбирати так, щоб знаходити невизначений інтеграл $\int vdu$ було б простіше, або принаймні не важче, ніж даний $\int udv$.

Приклад 1. Знайти $\int (3-2x)\cos 5xdx$.

Застосовуємо формулу інтегрування частинами

$$\int (3-2x)\cos 5xdx = \left| \begin{array}{ll} u = 3-2x, & du = -2dx, \\ dv = \cos 5xdx, & v = \frac{1}{5}\sin 5x \end{array} \right| = \frac{(3-2x)\sin 5x}{5} -$$

$$-\int (-2)\frac{1}{5}\sin 5xdx = \frac{(3-2x)\sin x}{5} - \frac{2\cos 5x}{25} + C.$$

Приклад 2. Знайти $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}dx$.

Двічі інтегруючи частинами, маємо

$$\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln^2 x, & du = \frac{2\ln xdx}{x}, \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}, & v = 2\sqrt{x} \end{array} \right| = 2\sqrt{x}\ln^2 x - 4\int \frac{\sqrt{x}\ln xdx}{x} =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x, & du = \frac{dx}{x}, \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}, & v = 2\sqrt{x} \end{array} \right| = 2\sqrt{x}\ln^2 x - 4\left(2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{\sqrt{x}dx}{x}\right) =$$

$$= 2\sqrt{x}\ln^2 x - 8\sqrt{x}\ln x + 16\sqrt{x} + C = 2\sqrt{x}(\ln^2 x - 4\ln x + 8) + C.$$

Приклад 3. Знайти $\int e^{2x}\sin 3xdx$.

Вводимо таке позначення $I = \int e^{2x}\sin 3xdx$ для даного інтеграла. Застосовуючи двічі формулу інтегрування частинами, повертаємось до нього ж у одержаному співвідношенні

$$I = \int e^{2x}\sin 3xdx = \left| \begin{array}{ll} u = \sin 3x, & du = 3\cos 3xdx, \\ dv = e^{2x}dx & v = \frac{e^{2x}}{2} \end{array} \right| = \frac{e^{2x}\sin 3x}{2} -$$

$$-\frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x dx = \left| \begin{array}{ll} u=\cos 3x, & du=-3\sin 3x dx, \\ dv=e^{2x}dx & v=\dfrac{e^{2x}}{2} \end{array} \right| = \frac{e^{2x}\sin 3x}{2} -$$

$$-\frac{3}{2}\left(\frac{e^{2x}\cos 3x}{2}+\frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x dx\right)=\frac{e^{2x}\sin 3x}{2}-\frac{3e^{2x}\cos 3x}{4}-\frac{9}{4}I.$$

З цього співвідношення остаточно знаходимо, враховуючи введене позначення

$$\frac{13}{4}I=\frac{e^{2x}\sin 3x}{2}-\frac{3e^{2x}\cos 3x}{4}+C,$$

$$\int e^{2x}\sin 3x dx=\frac{e^{2x}}{13}\left(2\sin 3x-3\cos 3x\right)+C.$$

3. Інтегрування раціональних дробів

Раціональним дробом називається вираз

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{B_0x^m+B_1x^{m-1}+\mathbf{K}+B_{m-1}x+B_m}{A_0x^n+A_1x^{n-1}+\mathbf{K}+A_{n-1}x+A_n}.$$

Тут $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлени степеня m та n відповідно (m, n – цілі числа), A_i, B_j $(i=0, 1, \mathbf{K}, n;\ j=0, 1, \mathbf{K}, m)$ – сталі дійсні числа, що називаються коефіцієнтами цих многочленів, x – незалежна змінна. Раціональний дріб називається ***правильним***, якщо $m<n$. У протилежному випадку він називається ***неправильним***. Всякий неправильний раціональний дріб можна записати у вигляді

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=S_{m-n}(x)+\frac{R_{n-1}(x)}{Q_n(x)},$$

де $S_{m-n}(x)$ – многочлен степеня $m-n$, $R_{n-1}(x)$ – многочлен степеня не більшого, ніж n – 1.

$Q_n(x)$, як многочлен із дійсними коефіцієнтами, згідно з основною теоремою алгебри розкладається на множники наступним чином

$$Q_n(x) = A_0(x-a_1)^{k_1}\ldots(x-a_m)^{k_m}(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{r_s},$$

де $a_1,\ldots,a_m$ – дійсні корені $Q_n(x)$ кратності $k_1,\ldots,k_m$ відповідно, кожен множник $(x^2+p_1x+q_1)^{r_1},\ldots,(x^2+p_sx+q_s)^{r_s}$ з дійсними коефіцієнтами відповідає одній парі комплексно спряжених коренів $z_1,\bar{z}_1\ldots,z_s,\bar{z}_s$ даного многочлена, що мають кратності $r_1,\ldots,r_s$. Виходячи із цього, правильний раціональний дріб при $A_0=1$ розкладається на суму

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{11}}{x-a_1}+\ldots+\frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}+\ldots+\frac{A_{m1}}{x-a_m}+\ldots+\frac{A_{mk_m}}{(x-a_m)^{k_m}}+\ldots+$$

$$+\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{B_{1r_1}x+C_{1r_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}}+\ldots+\frac{B_{1r_s}x+C_{1r_s}}{x^2+p_sx+q_s}+\ldots+$$

$$+\frac{B_{sr_s}x+C_{sr_s}}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_s}},\quad k_1+\ldots+k_m+2r_1+\ldots+2r_s=n.$$

Сталі, що стоять у чисельниках у правій частині цього розкладу, знаходяться методом невизначених коефіцієнтів.

Отже, щоб проінтегрувати раціональний дріб, досить проінтегрувати такі чотири вирази, які називаються ***елементарними раціональними дробами першого, другого, третього та четвертого типів***

$$\text{I.}\frac{A}{x-a},\ \text{II.}\frac{A}{(x-a)^k},\ \text{III.}\frac{Ax+B}{x^2+px+q},\ \text{IV.}\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},$$

$$k>1,\ p^2-4q<0.$$

Для елементарних раціональних дробів перших трьох типів маємо

$$\text{I.}\int\frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C,\ \text{II.}\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C,$$

$$\text{III.}\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+$$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+$$

$$+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Інтеграл від елементарного раціонального дробу четвертого типу спочатку слід привести до вигляду

$$\text{IV. }\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^k}dx=\frac{A}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k}+$$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}=\frac{A}{2(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}}+$$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{\left((x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^k}.$$

Після цього, ввівши позначення

$$x+\frac{p}{2}=t,\ \ q-\frac{p^2}{4}=a^2,\ \ I_k=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k},$$

для обчислення останнього інтеграла у попередньому виразі застосовують рекурентну формулу

$$I_k=\frac{t}{2a^2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2a^2(k-1)}I_{k-1}$$

$k-1$ раз, дійшовши таким чином до табличного інтеграла

$$I_1=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

<u>Приклад.</u> Знайти інтеграл $\int\frac{5x^2+13x-48}{x^4-2x^3-9x^2+20x+44}dx$.

З допомогою, наприклад, схеми Горнера знаходимо раціональні корені $x_1=x_2=-2$ многочлена $Q_4(x)=x^4-2x^3-9x^2+20x+44$ та розкладаємо його на множники

$$x^4-2x^3-9x^2+20x+44=(x+2)^2(x^2-6x+11).$$

Виходячи з вигляду цього розкладу, записуємо підінтегральний правильний раціональний дріб як суму елементарних раціональних дробів першого, другого та третього типів з невизначеними поки що коефіцієнтами у чисельниках

$$\frac{5x^2+13x-48}{(x+2)^2(x^2-6x+11)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-6x+11}.$$

Щоб знайти ці коефіцієнти, спочатку зводимо всі дробові вирази у правій частині цієї рівності до спільного знаменника $(x+2)^2(x^2-6x+11)$ та прирівнюємо одержаний чисельник до чисельника у лівій частині

$$\begin{gathered}A(x+2)(x^2-6x+11)+B(x^2-6x+11)+(Cx+D)(x+2)^2=\\=5x^2+13x-48.\end{gathered}$$

Тепер прирівнюємо або коефіцієнти при однакових степенях незалежної змінної у обох частинах одержаної рівності, або значення обох її частин при одному і тому ж значенні незалежної змінної (найкраще брати його рівним знайденим кореням многочлена $Q_4(x)=x^4-2x^3-9x^2+20x+$ $+44$). Одержуємо рівняння відносно A, B, C, D, яких повинно бути стільки ж, скільки і цих невизначених коефіцієнтів, тобто чотири. Розв'язуємо їх як систему

$$\begin{array}{l|llll}
x^3 & A+C=0, & C=-A, & C=-A, & C=1,\\
x^2 & -4A+B+4C+D=5, & D=7+8A, & D=7+8A, & D=-1,\\
x=-2 & 27B=-54, & B=-2, & B=-2, & B=-2,\\
x=0 & 22A+11B+4D=-48, & 11A+2D=-13, & 27A=-27, & A=-1.
\end{array}$$

Повертаючись до даного інтеграла, маємо

$$\int\frac{5x^2+13x-48}{x^4-2x^3-9x^2+20x+44}dx=\int\left(\frac{-1}{x+2}+\frac{-2}{(x+2)^2}+\frac{x-1}{x^2-6x+11}\right)dx=$$

$$= -\ln|x+2| + \frac{2}{x+2} + \int \frac{\frac{1}{2}(2x-6)+2}{x^2-6x+11}dx = -\ln|x+2| + \frac{2}{x+2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-6x+11)}{x^2-6x+11} + 2\int\frac{dx}{(x-3)^2+2} = \frac{2}{x+2} + \ln\frac{\sqrt{x^2-6x+11}}{|x+2|} +$$

$$+\sqrt{2}\mathrm{arctg}\frac{x-3}{\sqrt{2}} + C.$$

4. Інтегрування виразів, раціональних відносно sinx та cosx

Функція $R(\sin x, \cos x)$ називається раціональною відносно $\sin x$ та $\cos x$, якщо над $\sin x$, $\cos x$ та скінченою кількістю сталих дійсних чисел може виконуватись лише скінчена кількість арифметичних дій. В загальному випадку знаходження інтеграла $\int R(\sin x, \cos x)dx$ завжди можна звести до інтегрування раціонального дробу з допомогою заміни $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$, яка називається ***універсальною тригонометричною підстановкою***. Дійсно, при цьому

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad x = 2\mathrm{arctg}t,\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

і отже даний інтеграл набуває вигляду $\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$. Тут підінтегральна функція є раціональною відносно одніє змінної t, тобто є раціональним дробом. Останній інтегрується відомим методом, після чого слід повернутись до попередньої змінної.

Приклад 1. Знайти $\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$.

Застосовуючи універсальну тригонометричну підстановку, одержуємо

$$I=\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx=\left|\begin{array}{c}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\ \ dx=\frac{2dt}{1+t^2},\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{2-\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=$$

$$=4\int\frac{t^2-t+1}{(t^2+3)(t^2+1)}dt.$$

Розкладаємо підінтегральний раціональний дріб на суму елементарних раціональних дробів

$$\frac{t^2-t+1}{(t^2+3)(t^2+1)}=\frac{At+B}{t^2+3}+\frac{Ct+B}{t^2+1},\ \ t^2-t+1=(At+B)(t^2+1)+$$

$$+(Ct+D)(t^2+3),$$

$$\begin{array}{l|ll} t^3 & A+C=0, & A=0{,}5\\ t^2 & B+D=1, & B=1\\ t & A+3C=-1, & C=-0{,}5\\ t=0 & B+3D=1, & D=0\end{array}$$

$$I=4\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{t+2}{t^2+3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+1}\right)dt=\int\frac{d(t^2+3)}{t^2+3}+$$

$$+4\int\frac{dt}{t^2+3}-\int\frac{d(t^2+1)}{t^2+3}=\ln(t^2+3)+$$

$$+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}-\ln(t^2+1)+C.$$

Нарешті, повертаємось до попередньої змінної

$$I=\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+\ln\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+3}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}+C=\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+$$

$$+\ln\cos^2\frac{x}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+3\right)+C=\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+\ln\left(\sin^2\frac{x}{2}+3\cos^2\frac{x}{2}\right)+C=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+\ln(2+\cos x)+C.$$

В загальному випадку універсальна тригонометрична підстановка приводить до складних підінтегральних виразів. Для деяких частинних випадків функції $R(\sin x,\cos x)$ розглянемо інші заміни, простіші для практичного застосування.

1) Якщо в області свого визначення $R(\sin x, \cos x)$ є непарною відносно $\sin x$, тобто $R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$, то для знаходження інтеграла $\int R(\sin x, \cos x)dx$ слід застосувати заміну $\cos x = t$. Коли ж $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно $\cos x$, то використовується заміна $\sin x = t$.

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$.

Тут підінтегральна функція непарна відносно $\sin x$, отже виконуємо заміну $\cos x = t$.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \left|\cos x = t\right| = -\int \frac{(1-\cos^2 x)d(\cos x)}{\cos^4 x} = -\int \frac{(1-t^2)dt}{t^4} =$$
$$= \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

2) Якщо в області свого визначення $R(\sin x, \cos x)$ є парною відносно $\sin x$ та $\cos x$ одночасно, тобто $R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$, то для знаходження інтеграла $\int R(\sin x, \cos x)dx$ слід застосувати заміну $tgx = t$, враховуючи при цьому тотожності $\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x}$. Можна також робити заміну $ctgx = t$, маючи на увазі, що $\sin^2 x = \frac{1}{1+ctg^2 x}$, $\cos^2 x = \frac{ctg^2 x}{1+ctg^2 x}$.

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx$.

Підінтегральна функція парна відносно $\sin x$ та $\cos x$ одночасно, крім того в її чисельнику виділяється множник $ctg^2 x$. Все це вказує на те, що при знаходженні даного інтеграла слід виконати заміну $ctgx = t$.

$$\int\frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx=\left|\begin{array}{l}\mathrm{ctg}x=t,\ dx=\dfrac{-dt}{1+t^2},\\ \sin^2 x=\dfrac{1}{1+\mathrm{ctg}^2x},\end{array}\right|=\int\frac{\mathrm{ctg}^2x}{\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{ctg}^2x}\right)^2}dx=$$

$$=\int\frac{t^2}{\left(\dfrac{1}{1+t^2}\right)^2}\cdot\frac{-dt}{1+t^2}=-\int(t^2+t^4)dt=-\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+C=-\frac{\mathrm{ctg}^3x}{3}-\frac{\mathrm{ctg}^5x}{5}+C.$$

При інтегруванні виразу $\sin^{2m}x\cos^{2n}x$ $(m,n\in N)$ замість заміни $\mathrm{tg}x=t$ чи $\mathrm{ctg}x=t$, що приведе до інтегрування елементарних раціональних дробів четвертого типу, слід спочатку використати формули пониження степеня $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$. Після цього для доданків, що містять непарні степені $\sin 2x$ або $\cos 2x$ виконуються заміни $\cos 2x=t$ або $\sin 2x=t$ відповідно, а в доданках з парними степенями цих функцій знову застосовуються формули пониження степеня.

<u>Приклад 4.</u> Знайти інтеграл $\int\sin^4 x\cos^2 xdx$.

Застосовуємо формули пониження степеня

$$\int\sin^4 x\cos^2 xdx=\int\frac{(1-\cos 2x)^2}{4}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int(1-\cos^2 2x)(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{8}\int(1-\cos 2x-\cos^2 2x+\cos^3 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)-\frac{1}{8}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx+\frac{1}{16}\int(1-\sin^2 2x)d(\sin 2x)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)-\frac{1}{16}\left(x+\frac{\sin 4x}{4}\right)+\frac{1}{16}\left(\sin 2x-\frac{\sin^3 2x}{3}\right)+C=$$

$$=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}+C.$$

5. Інтегрування деяких ірраціональностей

Інтегрування виразів, раціональних відносно незалежної змінної та кореня цілого додатного степеня з дробово-лінійної функції.

Розглянемо інтеграл $\int R\left(x, \sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$, де, як і раніше, $R(u,v)$ – раціональна функція своїх аргументів, α, β, γ, δ – дійсні числа, $m \in N$, $m \geq 2$. Знаходження цього інтеграла зводиться до інтегрування раціонального дробу з допомогою заміни $\sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}} = t$.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\dfrac{dx}{x}$.

Виконуючи вказану заміну, маємо

$$I=\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=t,\ t^2=\dfrac{1-x}{1+x},\\ x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ dx=\dfrac{-4tdt}{(1+t^2)^2}\end{array}\right|=-4\int t\frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{tdt}{(1+t^2)^2}=$$

$$=-4\int\frac{t^2dt}{(1-t)(1+t)(1+t^2)}=-4\int\left(\frac{A}{1-t}+\frac{B}{1+t}+\frac{Ct+D}{1+t^2}\right)dt.$$

Складаємо рівняння

$$A(1+t)(1+t^2)+B(1-t)(1+t^2)+(Ct+D)(1-t^2)=t^2$$

для визначення коефіцієнтів A, B, C, D та завершуємо інтегрування.

$$\begin{array}{l|ll} t=1 & 4A=1, & A=0{,}25\\ t=-1 & 4B=1, & B=0{,}25\\ t=0 & A+B+D=0, & D=-0{,}5\\ t^3 & A-B-C=0, & C=0\end{array}$$

$$I=\ln|1-t|-\ln|1+t|+2\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=\ln\left|\frac{1-\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}{1+\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C=$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$$

Інтегрування диференціальних біномів.

Диференціальним біномом називається вираз вигляду $x^m(a+bx^n)^p dx$, де a, b – дійсні числа, а m, n, p – раціональні числа. Лише в таких трьох випадках інтеграл від нього буде елементарною функцією:

а) p – ціле. Маємо частинний випадок підінтегрального виразу, розглянутого в попередньому пункті, а тому для знаходження інтеграла $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ слід застосувати заміну $\sqrt[k]{x}=t$, де k – спільний знаменник раціональних чисел n, m.

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^3}$.

Тут $m=-1,\ n=\frac{1}{3},\ p=-3$ – ціле, і отже робимо заміну $\sqrt[3]{x}=t$.

$$I=\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^3}=\left|\begin{array}{c}\sqrt[3]{x}=t,\ x=t^3,\\ dx=3t^2dt\end{array}\right|=\int \frac{3t^2dt}{t^3(1+t)^3}=3\int \frac{dt}{t(1+t)^3}=$$

$$=3\int \left(\frac{A}{t}+\frac{B}{(1+t)^3}+\frac{C}{(1+t)^2}+\frac{D}{1+t}\right)dt.$$

Після зведення до спільного знаменника підінтегральної функції в останньому інтегралі, складаємо наступне рівняння для визначення коефіцієнтів A, B, C, D

$$A(1+t)^3+Bt+Ct(1+t)+Dt(1+t)^2=1.$$

Знаходимо A, B, C, D та завершуємо процес інтегрування

$$\begin{array}{l|ll} t=0 & A=1, & A=1, \\ t=-1 & B=-1, & B=-1, \\ t^3 & A+D=0, & D=-1, \\ t^2 & 3A+C+2D=0, & C=-1. \end{array}$$

$$I=3\ln\left|\frac{t}{1+t}\right|+\frac{3}{2(1+t)^2}+\frac{3}{1+t}+C=3\ln\left|\frac{\sqrt[3]{t}}{1+\sqrt[3]{t}}\right|+\frac{3}{2(1+\sqrt[3]{t})^2}+\frac{3}{1+\sqrt[3]{t}}+C.$$

b) $\frac{m+1}{n}$ – ціле. Знаходження інтеграла $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ зводиться до інтегрування раціонального дробу з допомогою заміни $\sqrt[k]{a+bx^n}=t$, де k – знаменник раціонального числа p.

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1+2x^2)^3}}$.

В даному випадку $m=3,\ n=2,\ p=-\frac{3}{2},\ \frac{m+1}{n}=2$ – ціле. Відповідно до цього робимо заміну $\sqrt{1+2x^2}=t$.

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1+2x^2)^3}}=\left|\begin{array}{c}\sqrt{1+2x^2}=t,\ 1+2x^2=t^2,\\ x=\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}},\ dx=\frac{1}{2}t\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}dt\end{array}\right|=$$

$$=\int \frac{\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} t\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}dt}{2t^3}=\frac{1}{4}\int \frac{(t^2-1)dt}{t^2}=\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{t}\right)+C=\frac{t^2+1}{4t}+C=$$

$$=\frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}+C.$$

c) $\frac{m+1}{n}+p$ – ціле. В цьому випадку одержимо підінтегральну функцію у вигляді раціонального дробу після заміни $\sqrt[k]{\frac{a+bx^n}{x^n}}=t$, де k – знаменник раціонального числа p.

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$.

Тут $m=-11,\ n=4,\ p=-\frac{1}{2},\ \frac{m+1}{n}+p=-3$ – ціле, отже до мети веде заміна $\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}}=t$. Маємо

$$\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}} = t,\ \frac{1+x^4}{x^4} = t^2,\ x^4 = \frac{1}{t^2-1}, \\ x = (t^2-1)^{-\frac{1}{4}},\ dx = -\frac{1}{2}(t^2-1)^{-\frac{5}{4}} tdt \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(t^2-1)^{\frac{11}{4}}(t^2-1)^{-\frac{5}{4}} tdt}{\sqrt{\frac{t^2}{t^2-1}}} = -\frac{1}{2}\int (t^2-1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{t^2-1}dt = -\frac{1}{2}\int (t^2-1)^2 dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (t^4-2t^2+1)dt = -\frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t\right) + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{1+x^4}}{2x^2}\left(\frac{(1+x^4)^2}{5x^8} - \frac{2(1+x^4)}{3x^4} + 1\right) + C.$$

РОЗДІЛ II. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1. Визначений інтеграл та його властивості.

Розглянемо функцію $f(x)$, визначену на деякому проміжку $[a, b]$. Розіб'ємо цей проміжок точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

на $n-1$ частинний відрізок $[x_k, x_{k+1}]$, $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ та виберемо довільним чином точки $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Утворимо суму виду $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$, де $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Ця сума називається ***інтегральною сумою***, утвореною для $f(x)$ при даному розбитті $[a, b]$ на частинні відрізки $[x_k, x_{k+1}]$ та при даному виборі точок $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Нехай $\lambda = \max_{0 \le k \le n-1}\{\Delta x_k\}$, тоді ***визначеним інтегралом*** від $f(x)$ на $[a, b]$ називається границя

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

при умові, що ця границя скінченна та не залежить ні від способу розбиття $[a, b]$ на частинні відрізки $[x_k, x_{k+1}]$, ні від способу вибору в них точок $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. При цьому $f(x)$ називається ***інтегровною*** на $[a, b]$. Процес утворення інтегральної суми зображено на рис. 1.

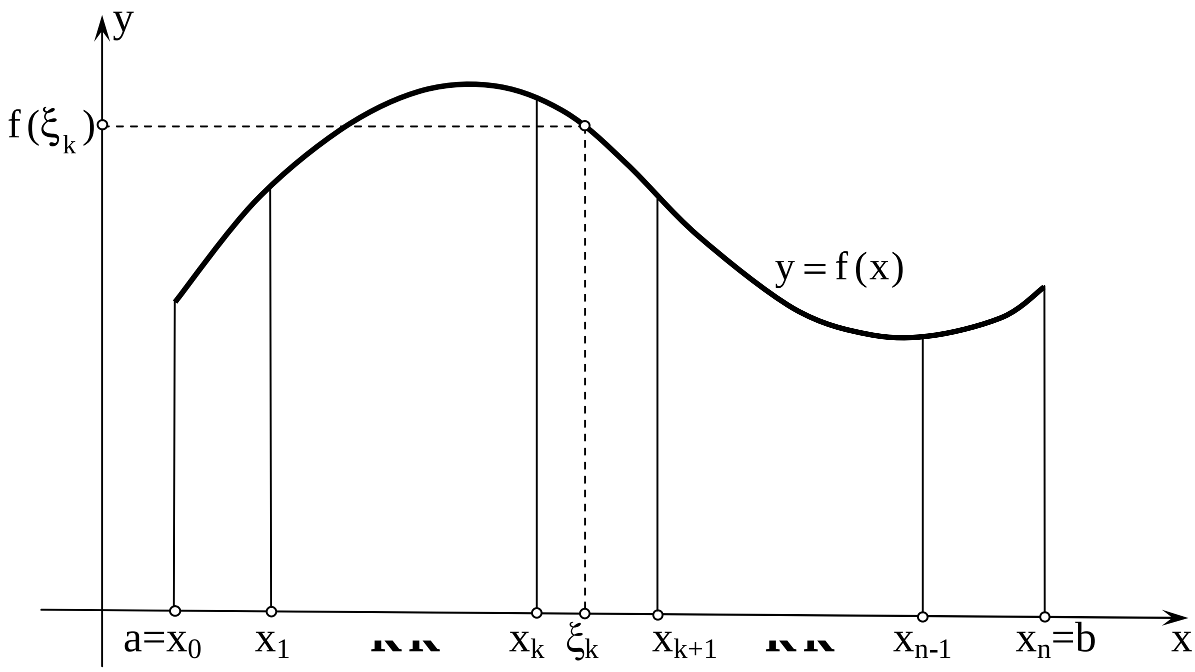

Рис. 1

З рис. 1 і означення визначеного інтеграла випливає також, що при умові, коли на $[a, b]$ $f(x) > 0$ та неперервна, $\int_a^b f(x)dx$ є рівним площі S плоскої фігури, що обмежена кривою $y = f(x)$ та прямими $y = 0$, $x = a$, $x = b$. В цьому полягає ***геометричний зміст визначеного інтеграла***, який виражається формулою $S = \int_a^b f(x)dx$. Описана плоска фігура називається ***криволінійною трапецією***. Зауважимо, що при $b = a$ вважають, що $\int_a^a dx = 0$.

З даного означення та теорем про границі випливають наступні властивості визначеного інтеграла для інтегровних функцій

1. $\int\limits_a^b dx = b - a$.

2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

3. ***Лінійність*** визначеного інтеграла.

Якщо A, B – довільні сталі дійсні числа, то

$$\int\limits_a^b [Af(x) + Bg(x)]dx = A\int\limits_a^b f(x)dx + B\int\limits_a^b g(x)dx.$$

4. ***Адитивність*** визначеного інтеграла.

Якщо $c \in (a, b)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

5. Якщо при всіх $x \in [a, b]$ $f(x) \le g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$. В частинних випадках маємо

a) $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

b) При умові, що $A \le f(x) \le B$, $x \in [a, b]$, A, B – сталі

$$A(b - a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le B(b - a).$$

6. Теорема про середнє.

Якщо $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то знайдеться принаймні одна точка $c \in (a, b)$ така, що $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a)$.

2. Визначений інтеграл як функція верхньої змінної межі. Формула Ньютона-Лейбніца.

Нехай $f(x)$ є неперервною для всіх $x \in [a, b]$, тоді визначений інтеграл $\int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b]$ можна розглядати як деяку функцію на $[a, b]$. Ця функція буде диференційовною при $a \le x \le b$ (в точці x = a існує правостороння похідна, в точці x = b – лівостороння). Для її похідної виконується рівність $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$, тобто $\int_a^x f(t)dt$ – одна з первісних функції $f(x)$ на $[a, b]$. Звідси випливає, що коли $F(x)$ – деяка первісна для $f(x)$ на цьому ж проміжку, то має місце формула $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, що називається ***формулою Ньютона-Лейбніца***. Використовуючи позначення $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, цю формулу записують також у вигляді $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$ і застосовують для обчислення визначеного інтеграла у випадках, коли первісну $F(x)$ вдається знайти у вигляді елементарної функції.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_1^{\frac{1}{2}} (3x - \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{3})dx$.

На основі формули Ньютона-Лейбніца маємо

$$\int_0^1 (3x - \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{3})dx = \left(\frac{3x^2}{2} + \frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{\pi}\cos\frac{\pi x}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} - \left(0 + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

3. Заміна змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Заміна змінної.

Нехай функція $\varphi(t)$ монотонно зростає при всіх $t\in[\alpha,\beta]$ та неперервна на $[\alpha,\beta]$ разом із своєю похідною. Тоді, якщо $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ і функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то має місце рівність

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

що називається ***формулою заміни змінної у визначеному інтегралі***.

Приклади. Обчислити інтеграли

$$a)\int_1^2\sqrt{4-x^2}dx,\ b)\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1+3x^2}},\ c)\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{4x^2-9}}{x^2}dx.$$

Для обчислення даних інтегралів застосовуємо відповідно заміни

$$a)\,x=2\sin t,t\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}],\ b)\,x=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}t,t\in[0,\frac{\pi}{3}],\ c)\,x=\frac{3}{2\cos x},t\in[0,\frac{\pi}{6}],$$

з допомогою яких позбавляємось від ірраціональності, після чого розкриваємо модулі в межах границь інтегрування, знаходимо первісні для підінтегральних функцій відомими методами та застосовуємо формулу Ньютона-Лейбніца. Маємо

$$a)\int_1^2\sqrt{4-x^2}dx=\left|\begin{array}{c}x=2\sin t,\\ dx=2\cos tdt\end{array}\right|=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos t\cdot2\cos tdt=4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2t}{2}dt=$$

$$=2\left(t+\frac{\sin2t}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=2(\frac{\pi}{2}+0-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{6}.$$

$$b)\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1+3x^2}}=\left|\begin{array}{l} x=\frac{1}{\sqrt{3}}\,tgt, \\ dx=\frac{dt}{\sqrt{3}\cos^2 t}\end{array}\right|=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 t}{3\cos^2 t\cdot\frac{1}{\cos^2 t}}\cdot\frac{dt}{\sqrt{3}\cos^2 t}=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} tg^2 tdt=\left|\begin{array}{l} tgt=z, \\ dt=\frac{dz}{1+z^2}\end{array}\right|=\frac{\sqrt{3}}{9}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{z^2}{1+z^2}dz=\frac{\sqrt{3}}{9}\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+z^2}\right)dz=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{9}(z-\mathrm{arctg}z)\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{9\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{9\sqrt{3}}\ .$$

$$c)\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{4x^2-9}}{x^2}dx=\left|\begin{array}{l} x=\frac{3}{2\cos t}, \\ dx=\frac{3\sin tdt}{2\cos^2 t}\end{array}\right|=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{3\sin t\cdot 2\cos t}{\cos t\cdot 3}\cdot\frac{3\sin tdt}{2\cos^2 t}=3\int_0^{\frac{\pi}{6}} tg^2 tdt=$$

$$=\left|\begin{array}{l} tgt=z, \\ dt=\frac{dz}{1+z^2}\end{array}\right|=3\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{z^2}{1+z^2}dz=3\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(1-\frac{1}{1+z^2}\right)dz=3(z-\mathrm{arctg}z)\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=$$

$$=3(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{2\sqrt{3}-\pi}{2}\ .$$

Зауважимо, що в загальному випадку для раціоналізації підінтегральних функцій вигляду

$$R(x,\sqrt{m^2-n^2x^2}),\ R(x,\sqrt{m^2+n^2x^2}),\ R(x,\sqrt{n^2x^2-m^2}),$$

де $R(u,v)$ – раціональна функція аргументів u та v, застосовують заміни

$$x=\frac{m}{n}\sin t,\ x=\frac{m}{n}tgt,\ x=\frac{m}{n\cos t}$$

відповідно, які називаються ***тригонометричними підстановками***.

Інтегрування частинами.

Якщо функції $u=u(x)$, $v=v(x)$ неперервні разом із похідними u', v' на відрізку $[a,b]$, то для них справедлива наступна ***формула інтегрування частинами*** $\int_a^b udv=uv\big|_a^b-\int_a^b vdu$.

Тут, як і раніше, $uv\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Приклади. Обчислити інтеграли

$$a)\ \int_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}x\,dx,\quad b)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx,\ n \in N.$$

Згідно з формулою інтегрування частинами маємо

$$a)\ \int_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \mathrm{arctg}x,\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, \\ dv = xdx,\ v = \dfrac{1}{2}x^2 \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}x^2\mathrm{arctg}x\Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(x - \mathrm{arctg}x)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}.$$

$$b)\ I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \cos^{n-1}x,\ du = -(n-1)\cos^{n-2}x\sin x\,dx, \\ dv = \cos x\,dx,\ v = \sin x \end{matrix} \right| =$$

$$= \sin x \cdot \cos^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}x\sin^2 x\,dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}x\,dx - (n-1)\cdot I,\ n > 1.$$

Звідси одержуємо таку рекурентну формулу

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}x\,dx,\ n > 1.$$

Застосуємо її окремо для парних і непарних значень n. У випадку, коли n – парне, тобто коли $n = 2k,\ k \in N$, маємо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} x\,dx = \frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdot \mathbf{K} \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdot \mathbf{K} \cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

або, враховуючи позначення

$$1\cdot 3\cdot \mathbf{K}\cdot(2k-3)\cdot(2k-1)=(2k-1)!!,\ \ 2\cdot 4\cdot \mathbf{K}\cdot(2k-2)\cdot(2k)=(2k)!!,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2k}x\,dx=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Якщо ж n – непарне, тобто коли $n=2k-1,\ k\in N$, одержуємо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2k-1}x\,dx=\frac{2k-2}{2k-1}\cdot\frac{2k-4}{2k-3}\cdot\mathbf{K}\cdot\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}$$

.

При цьому вважається, що 0!! = 1. Аналогічно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k}x\,dx=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2},\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k-1}x\,dx=\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}.$$

4. Застосування визначеного інтеграла до розв'язування деяких геометричних задач

1) Обчислення площ плоских фігур в декартових координатах.

Згідно з геометричним змістом визначеного інтеграла площа S криволінійної трапеції, що обмежена кривою $y=f(x)$ та прямими $y=0,\ x=a,\ x=b$, обчислюється за формулою $S=\int_a^b f(x)dx$ (при умові, коли $f(x)>0$ та неперервна на $[a,\ b]$). У випадку, якщо $y=f(x)$ задана параметрично з допомогою рівнянь

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}\quad x(\alpha)=a,\ x(\beta)=b,\ x'(t)>0,\ y(t)>0,\ t\in[\alpha,\ \beta],$$

де $x'(t),\ y(t)$ – неперервні на $[\alpha,\ \beta]$, остання формула набуває вигляду

$$S=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt.$$

Якщо плоска фігура обмежена прямими $x=a,\ x=b$ та кривими

$$y = y_1(x),\ y = y_2(x),\ y_1(x) < y_2(x),\ x \in [a, b],$$

$y_1(x),\ y_2(x)$ – неперервні на $[a, b]$, то для її площі S має місце рівність

$$S = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]dx.$$

<u>Приклад 1.</u> Обчислити площу плоскої фігури, яка обмежена лініями $y = 1 - x$, $y = x^2 - 2x - 1$.

Знаходимо спочатку координати точок M_1, M_2 перетину даних ліній (прямої та параболи) як розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} y = 1 - x, \\ y = x^2 - 2x - 1, \end{cases} \quad x^2 - 2x - 1 = 1 - x,\ x^2 - x - 2 = 0,\ x_1 = -1,\ x_2 = 2,$$

$$M_1 = M_1(-1,\ 2),\ M_2 = M_2(2,\ -1)$$

та зображуємо описану плоску фігуру (Рис. 2).

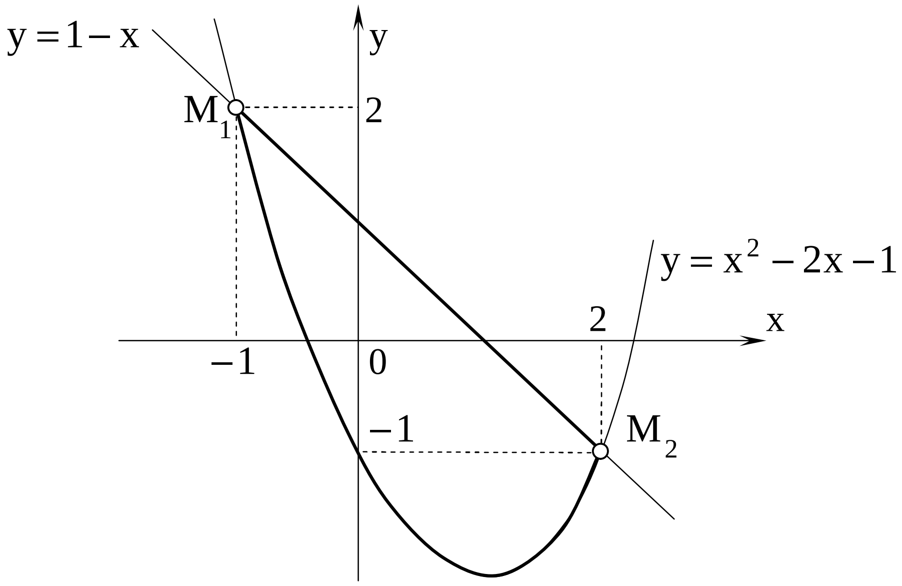

Рис. 2

До обчислення площі S фігури застосовуємо формулу

$$S = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]dx,$$

згідно з якою маємо

$$S=\int_{-1}^{2}(1-x-x^2+2x+1)dx=\int_{-1}^{2}(2+x-x^2)dx=(2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3})\Big|_{-1}^{2}=$$

$$=4+2-\frac{8}{3}-(-2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})=5-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}.$$

<u>Приклад 2.</u> Обчислити площу плоскої фігури, що обмежена неявно заданою кривою з допомогою рівняння $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Дана крива – еліпс (Рис. 3), а його рівняння мжна задати також параметрично системою рівнянь $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases}$ $t\in[0,\ 2\pi]$. Позначимо площу всієї фігури, що обмежена еліпсом, через S. Внаслідок симетрії еліпса досить обчислити площу лише четвертої частини даної фігури, що заштрихована на рис. 3. Для цього застосуємо формулу $\frac{S}{4}=\int_{\alpha}^{\beta}y(t)x'(t)dt$, приймаючи до уваги те, що $0=a\cos\frac{\pi}{2}$, $a=a\cos 0$ і, отже, $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=0$.

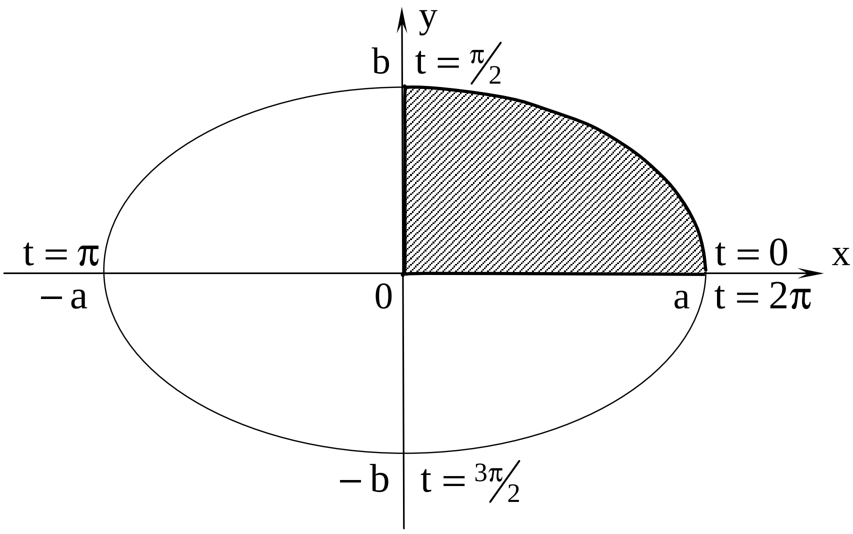

Рис. 3

Одержуємо, враховуючи наведену в прикладах з п. 3 рівність,

$$\frac{S}{4}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}b\sin t(-a\sin t)dt=-ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t dt=ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},\quad S=\pi ab.$$

2) <u>Обчислення площі криволінійного сектора в полярних координатах.</u>

Якщо плоска фігура обмежена двома променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ та кривою $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, де α, β – полярні координати, то площа S такої фігури обчислюється за формулою $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi$.

<u>Приклад.</u> Обчислити площу плоскої фігури, що обмежена лінією, яка задана рівнянням $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, де ρ, φ – полярні координати.

Очевидно, коли φ буде мінятись на проміжку $[0, 2\pi]$, точка (φ, ρ) опише замкнену криву, яка називається ***кардіоїдою*** і є симетричною відносно полярної осі (Рис. 4).

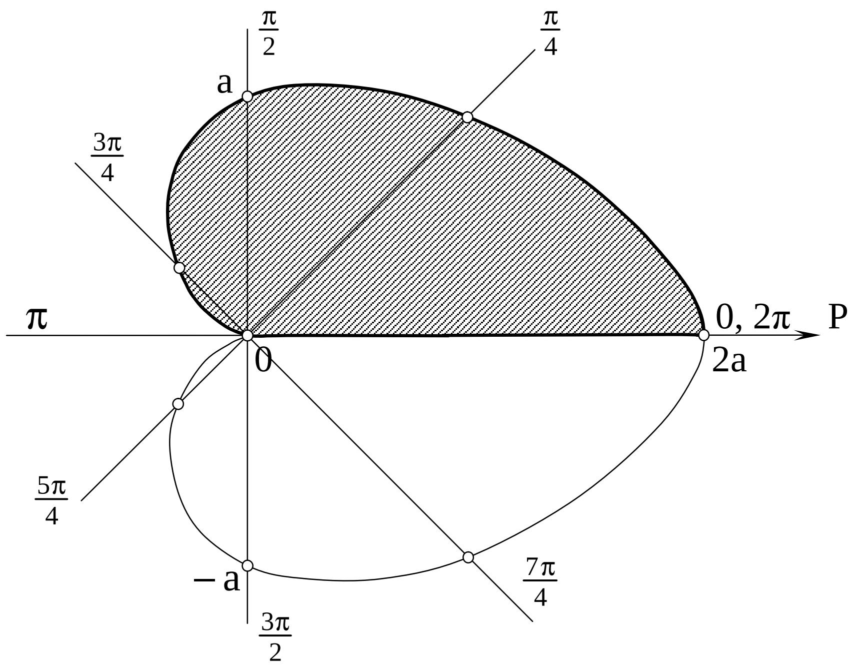

Рис. 4

Внаслідок цього доцільно обчислювати половину площі S даної фігури (на рис. 4 – заштрихована) з допомогою формули $\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi$, де $\alpha = 0$, $\beta = \pi$.

$$\frac{S}{2}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\varphi)^2d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\right)d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{3a^2\pi}{4},\quad S=\frac{3a^2\pi}{2}.$$

3) Обчислення довжини дуги кривої.

a) *Крива задана в декартових координатах рівнянням у явному вигляді.*

Нехай $f(x)$ – неперервна на $[a, b]$, тоді довжина L дуги кривої, що задається рівнянням $y=f(x)$, $x\in[a, b]$, обчислюється за формулою $L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$.

b) *Крива задана в декартових координатах параметрично.*

Якщо $x'(t)$, $y'(t)$ – неперервні на $[\alpha, \beta]$, то довжину L дуги кривої, що задається параметрично рівняннями $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ $t\in[\alpha, \beta]$, можна знайти з допомогою співвідношення

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$$

c) *Крива задана рівнянням у полярних координатах.*

У цьому випадку, коли крива описується рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha, \beta]$, де α, β – полярні координати, для довжини L дуги даної кривої маємо $L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\varphi)+[\rho'(\varphi)]^2}d\varphi$ (при умові, що $\rho'(\varphi)$ – неперервна на $[\alpha, \beta]$).

Приклади. Обчислити довжину L дуги кривої

a) заданої явно рівнянням у декартових координатах

$$y=\frac{1}{2}(3-e^x-e^{-x}),\ x\in[0, 3].$$

У відповідності з формулою $L = \int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$ маємо, враховуючи, що $\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \mathrm{ch}x$, $(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$, $\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = 1$,

$$L = \int\limits_0^3 \sqrt{1+\mathrm{sh}^2x}dx = \int\limits_0^3 \sqrt{\mathrm{ch}^2x}dx = \int\limits_0^3 \mathrm{ch}x dx = \mathrm{sh}x\Big|_0^3 = \mathrm{sh}3.$$

b) заданої параметрично з допомогою рівнянь $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ $t \in [0,\ 2\pi]$.

Ця крива зображена на рис. 5 і називається ***астроїдою***.

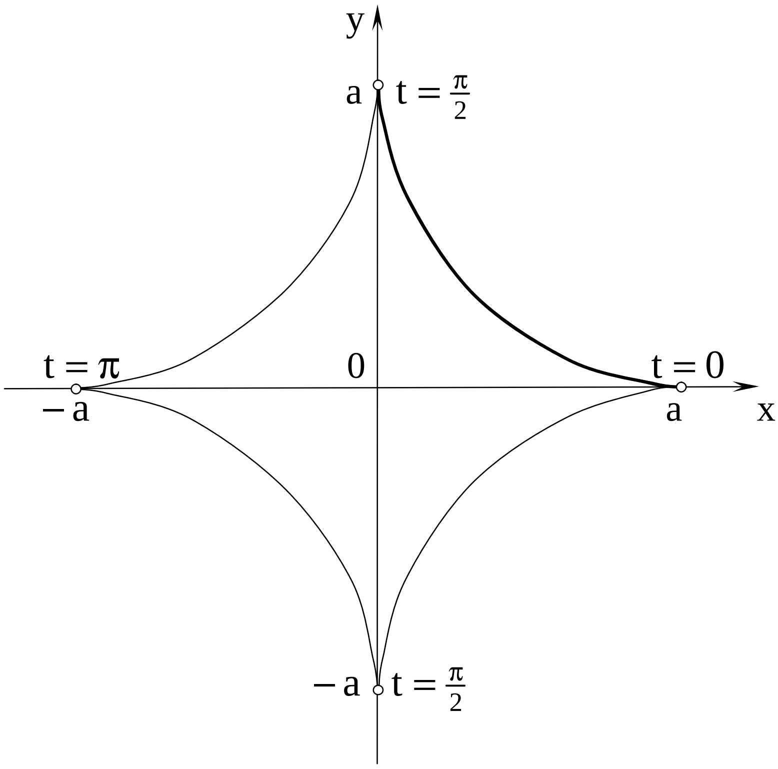

Рис. 5

Щоб при завершенні інтегрування уникнути розкривання модулів, доцільно внаслідок симетрії астроїди обчислювати четверту частину її довжини L (відповідна частина астроїди виділена на рис. 5).

$$\frac{L}{4} = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[-3a\cos^2 t\sin t]^2 + [3a\sin^2 t\cos t]^2}dt =$$

$$= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = \frac{3a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -\frac{3a}{4}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3a}{4}(-2) = \frac{3a}{2},\ L = 6a.$$

c) заданої в полярних координатах рівнянням $\rho = a(1-\sin\varphi)$.

Це кардіоїда, що зображена на рис. 4, але повернута на кут $-\frac{\pi}{2}$. Для спрощення розрахунків слід використати її симетрію та знаходити половину довжини L даної кривої, що виділена на рис. 6.

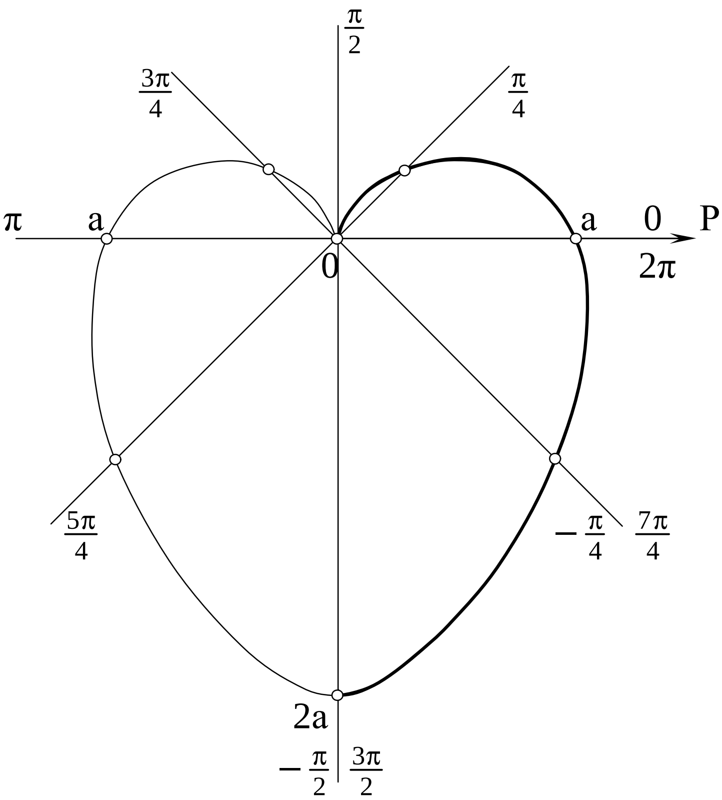

Рис. 6

$$\frac{L}{2} = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2}d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2(1-\sin\varphi)^2 + a^2\cos^2\varphi d\varphi} =$$

$$= a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-2\sin\varphi+\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}d\varphi = a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2(1-\sin\varphi)}d\varphi = \begin{vmatrix}\varphi = t-\frac{\pi}{2}, \\ d\varphi = dt\end{vmatrix} =$$

$$= a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos t)}dt = a\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{t}{2}}dt = 2a\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}dt = 4a\sin\frac{t}{2}\bigg|_0^{\pi} = 4a\,,$$

$$L = 8a.$$

5. *Невласні інтеграли*

1) Невласні інтеграли першого роду.

Якщо функція $f(x)$ неперервна при всіх $x \in [a\,,\,+\infty)$, то ***невласним інтегралом першого роду*** від функції $f(x)$ на $[a\,,\,+\infty)$ називається границя

$\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_a^t f(x)dx$, яка позначається символом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Отже

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx\,.$$

При цьому якщо границя в правій частині даної рівності існує і скінченна, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називається ***збіжним***, у протилежному випадку – ***розбіжним***.

Приклад 1. Дослідити на збіжність невласний інтеграл першого роду $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ для всіх значень параметра $p \in R$.

Згідно з означенням маємо

a) при $p = 1$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty}\ln x\Big|_1^t = \lim_{t\to+\infty}\ln t = +\infty.$$

b) при $p < 1$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{dx}{x^p} = \lim_{t\to+\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_1^t = \frac{1}{1-p}\lim_{t\to+\infty}(t^{1-p}-1) = +\infty.$$

c) при $p>1$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{dx}{x^p}=-\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{(p-1)x^{p-1}}\bigg|_1^t=-\frac{1}{p-1}\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^{p-1}}-1\right)=\frac{1}{p-1}.$$

Отже даний інтеграл збігається при $p>1$ і розбігається при $p\le 1$.

Виходячи з означення, легко встановити збіжність або розбіжність $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ у випадку, коли первісна $F(x)$ для $f(x)$ на $[a,+\infty)$ є елементарною функцією. В інших випадках для цього використовують наступні ***ознаки збіжності або розбіжності*** для неперервних на $[a,+\infty)$ функцій $f(x)$, $g(x)$.

I. Якщо $0<f(x)\le g(x)$ при всіх $x\in[a,+\infty)$, то із збіжності $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає збіжність $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а з розбіжності $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

II. Нехай $f(x)>0$, $g(x)>0$, $x\in[a,+\infty)$, $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Тоді якщо

a) $0<A<+\infty$, то інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

b) $A=0$, то із збіжності $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає збіжність $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а з розбіжності $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

c) $A=+\infty$, то із збіжності $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ виплиatє збіжність $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, а з

розбіжності $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає розбіжність $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

III. Якщо $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ збігається, то збігається і $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. При цьому

останній інтеграл називається абсолютно збіжним.

Аналогічно розглядаються невласні інтеграли першого роду вигляду

$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

2) <u>Невласні інтеграли другого роду.</u>

Якщо функція $f(x)$ неперервна при всіх $x \in (a, b]$, причому $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, то ***невласним інтегралом другого роду*** від функції $f(x)$ на $(a, b]$ називається границя $\lim\limits_{t\to a+0}\int_t^b f(x)dx$, яка позначається символом $\int_a^b f(x)dx$. Отже $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{t\to a+0}\int_t^b f(x)dx$. Аналогічно, коли $f(x)$ неперервна на проміжку $[a, b)$, причому $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$, то границя $\lim\limits_{t\to b-0}\int_a^t f(x)dx$ також називається невласним інтегралом другого роду від функції $f(x)$ на $[a, b)$ і позначається тим же символом $\int_a^b f(x)dx$, тобто $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{t\to b-0}\int_a^t f(x)dx$. В обох випадках якщо границя в правій частині існує і скінченна, то $\int_a^b f(x)dx$ називається ***збіжним***, у протилежному випадку – ***розбіжним***. Розглядаючи як і в першому прикладі невласний інтеграл другого роду $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ (або $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$), $p \in R$ легко встановити, що він збігається при $p<1$ та розбігається при $p \ge 1$. Ознаки збіжності або розбіжності невласних інтегралів другого роду повністю аналогічні наведеним ознакам у випадку невласних інтегралів першого роду.

<u>Приклад 2.</u> Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_0^2 \frac{(2x+1)dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$.

Тут $f(x)=\frac{2x+3}{e^{\sqrt{x}}-1}>0,\ x \in (0,\ 2],\ \lim\limits_{x \to +0} f(x)=+\infty$, отже даний інтеграл є невласним інтегралом другого роду. Розглянемо іншу функцію $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}>0,\ x \in (0,\ 2],\ \lim\limits_{x \to +0} g(x)=+\infty$, для якої невласний інтеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ збігається ($p=0{,}5<1$). Внаслідок того, що нескінченно мала $e^{\sqrt{x}}-1$ еквівалентна нескінченно малій $\sqrt{x}$ при $x \to +0$ маємо $A=\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=$

$=\lim\limits_{x \to +0} \frac{(2x+3)\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1}=3,\ 0<A<+\infty$, і отже у відповідності з ознаками збіжності та розбіжності невласних інтегралів даний інтеграл збігається.

РОЗДІЛ III. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

I. Знайти невизначені інтеграли

1. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$

2. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

3. $\int \frac{dx}{(\arcsin^2 x)\sqrt{1-x^2}}$

4. $\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$

5. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$

6. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$

7. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$

8. $\int x^2 e^{-x^3}dx$

9. $\int \frac{x^3}{\sqrt{7-x^4}}dx$

10. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$

11. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$

12. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

13. $\int \frac{dx}{(\arcsin^2 x)\sqrt{1-x^2}}$

14. $\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$

15. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$

16. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$

17. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$

18. $\int x^2 e^{-x^3}dx$

19. $\int \frac{x^3}{\sqrt{7-x^4}}dx$

20. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$

21. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}dx$

22. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$

23. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$

24. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

25. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

26. $\int x^2\sqrt[4]{x^3+2}dx$

27. $\int \frac{ctg^3 x}{\sin^2 x} dx$

28. $\int \frac{\sqrt{3+2\ln x}}{x} dx$

29. $\int \frac{(\arccos x)^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

30. $\int \frac{e^x}{\sqrt{5-2e^x}} dx$

II. Інтегруванням частинами знайти невизначені інтеграли

1. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$
2. $\int x^2 \ln(1+x) dx$
3. $\int \ln^2 x \, dx$
4. $\int x \sin 2x dx$
5. $\int x^2 \sin x dx$
6. $\int x e^{-2x} dx$
7. $\int x^2 e^x dx$
8. $\int \arcsin x dx$
9. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$
10. $\int (7x-3) e^{-3x} dx$
11. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$
12. $\int x^2 \ln(1+x) dx$
13. $\int \ln^2 x \, dx$
14. $\int x \sin 2x dx$
15. $\int x^2 \sin x dx$
16. $\int x e^{-2x} dx$
17. $\int x^2 e^x dx$
18. $\int \arcsin x dx$
19. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$
20. $\int (7x-3) e^{-3x} dx$
21. $\int (2-3x) \sin x dx$
22. $\int \ln(x^2+4) dx$
23. $\int (1-2x) e^{-x} dx$
24. $\int (5x+4) \cos x dx$
25. $\int (x+1) e^{2x} dx$
26. $\int (x^2+x) \ln x dx$
27. $\int (1-2x) e^{-x} dx$
28. $\int \sqrt{x} \ln x dx$
29. $\int (2x+3) \sin 3x dx$
30. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{4x-1} dx$

III. Проінтегрувати раціональні дроби

1. $\int \frac{x}{x^3+4x^2+5x+2}dx$

2. $\int \frac{3x^2+9x-4}{x^3-x^2+2}dx$

3. $\int \frac{3x+5}{x^3+6x^2+11x+6}dx$

4. $\int \frac{3x+1}{x^3+5x^2+7x+3}dx$

5. $\int \frac{x^2-5x-14}{x^3+3x^2+9x-13}dx$

6. $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$

7. $\int \frac{7x+4}{x^3-3x-2}dx$

8. $\int \frac{x^2+7x-11}{x^3-5x^2+4x+10}dx$

9. $\int \frac{9x+13}{x^3-7x-6}dx$

10. $\int \frac{9x+5}{x^3-x^2-5x-3}dx$

11. $\int \frac{x^2-7x+20}{x^3+x^2+4x+30}dx$

12. $\int \frac{7x+1}{x^3+2x^2-5x-6}dx$

13. $\int \frac{5x-8}{x^3-3x+2}dx$

14. $\int \frac{x^2+2x+14}{x^3+3x^2+25x-29}dx$

15. $\int \frac{2x^2+6x+9}{x^3+3x^2+4x+2}dx$

16. $\int \frac{7x-11}{x^3+x^2-5x+3}dx$

17. $\int \frac{x^2-2x}{x^3-x^2-x-15}dx$

18. $\int \frac{5x+7}{x^3+4x^2+x-6}dx$

19. $\int \frac{3x-4}{x^3-4x^2+5x-2}dx$

20. $\int \frac{13+11x-x^2}{x^3+3x^2-8x-30}dx$

21. $\int \frac{5x-7}{x^3-4x^2+x+6}dx$

22. $\int \frac{9x+23}{x^3+x^2-8x-12}dx$

23. $\int \frac{8-6x}{x^3-x^2-7x+15}dx$

24. $\int \frac{3x^2+x+2}{x^3-x^2-7x-5}dx$

25. $\int \frac{7x-11}{x^3-3x^2+4}dx$

26. $\int \frac{12x^2+5x+6}{4x^3+x+5}dx$

27. $\int \frac{7x-1}{x^3-2x^2-5x+6}dx$

28. $\int \frac{11x-17}{x^3-x^2-8x+12}dx$

29. $\int \frac{12x^2-3x+9}{2x^3+3x-5}dx$

30. $\int \frac{9x-13}{x^3-7x+6}dx$

IV. Знайти невизначені інтеграли

1. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx$

2. $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2} dx$

3. $\int \frac{1}{5-3\cos x} dx$

4. $\int \frac{1}{\sin x - \cos x} dx$

5. $\int \frac{1}{1+3\cos^2 x} dx$

6. $\int \frac{1}{1+8\sin^2 x} dx$

7. $\int \frac{1}{3+2\cos x} dx$

8. $\int \operatorname{tg}^4 x dx$

9. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$

10. $\int \frac{1}{\sin^4 x} dx$

11. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$

12. $\int \frac{1}{2+3\cos x} dx$

13. $\int \cos x \sin 3x dx$

14. $\int \frac{1}{\sin x} dx$

15. $\int \operatorname{tg}^5 x dx$

16. $\int \frac{1}{\cos x \sin^3 x} dx$

17. $\int \cos^5 x dx$

18. $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx$

19. $\int \frac{1}{2-\sin x} dx$

20. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$

21. $\int \frac{1}{\sin^6 x} dx$

22. $\int \frac{\cos x}{1+8\sin^2 x} dx$

23. $\int \sin^4 x dx$

24. $\int \frac{1}{5-4\sin x+3\cos x} dx$

25. $\int \sin^3 x \cos x dx$

26. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$

27. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

28. $\int \frac{1}{\cos x} dx$

29. $\int \cos^3 x dx$

30. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$

V. Знайти невизначені інтеграли

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$

2. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$

3. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-12x+13}}dx$

4. $\int \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx$

5. $\int \frac{1}{\sqrt{25x^2+10x+17}}dx$

6. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

7. $\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{\mathrm{arctg}x}}dx$

8. $\int \frac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\sqrt{x}}}dx$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{2-3x-x^2}}dx$

11. $\int \frac{x+3}{\sqrt[3]{x-1}}dx$

12. $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}dx$

13. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$

14. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

15. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

16. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}}dx$

17. $\int \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}}dx$

18. $\int \frac{1}{\left(\sqrt[4]{x+3}-1\right)\sqrt{x+3}}dx$

19. $\int \frac{x-2}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$

20. $\int \frac{\sqrt[3]{x}-5}{\sqrt{x}}dx$

21. $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$

22. $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}dx$

23. $\int \frac{1}{(5+x)\sqrt{x+1}}dx$

24. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{3x+1}-1}dx$

25. $\int \frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}dx$

26. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$

27. $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}dx$

28. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\left(\sqrt{x+1}\right)^3}dx$

29. $\int \frac{1}{\sqrt{4x-3-x^2}}dx$

30. $\int \frac{1}{\sqrt{8+6x-9x^2}}dx$

VI. Обчислити визначений інтеграл

1. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{2+\cos x}$

2. $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^4 x dx$

3. $\int_{-\pi/4}^{0} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$

4. $\int_{2\operatorname{arctg}2}^{2\operatorname{arctg}3} \frac{dx}{(1-\cos x)\cos x}$

5. $\int_0^{\pi} \cos^4 x dx$

6. $\int_0^{\pi/3} \sin^5 x dx$

7. $\int_{2\operatorname{arctg}1/3}^{2\operatorname{arctg}1/2} \frac{dx}{(1-\sin x)\sin x}$

8. $\int_{-\pi/2}^{0} \sin^2 x \cos^2 x dx$

9. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^3 x dx$

10. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{5+4\cos x}$

11. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^2 x dx$

12. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x dx$

13. $\int_0^{2\pi/3} \frac{1+\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$

14. $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 x \cos^4 x dx$

15. $\int_{-\pi/4}^{0} \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx$

16. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1+\sin x-\cos x}$

17. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 x dx$

18. $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos x dx}{3+\cos^2 x}$

19. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1+\cos x+\sin x}$

20. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^2 x dx$

21. $\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx$

22. $\int\limits_{-2\pi/3}^{0} \frac{\cos x dx}{1 - \sin x + \cos x}$

23. $\int\limits_{-\pi/4}^{0} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$

24. $\int\limits_{-\pi/2}^{0} \sin^2 x \cos^3 x dx$

25. $\int\limits_{\pi/2}^{2\operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{(1 + \sin x)\sin x}$

26. $\int\limits_{-\pi/2}^{0} \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$

27. $\int\limits_{0}^{\pi/6} \cos^5 x dx$

28. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{5 + 3\sin x}$

29. $\int\limits_{-\pi/4}^{0} \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$

30. $\int\limits_{-\pi/4}^{0} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$

VII. Обчислити визначений інтеграл

1. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}}$

2. $\int\limits_{0}^{1} x^2 \sqrt{1 - x^2} dx$

3. $\int\limits_{1}^{3} \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x + 1)} dx$

4. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(9 + x^2)\sqrt{9 + x^2}}$

5. $\int\limits_{4}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}$

6. $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} dx$

7. $\int\limits_{1}^{9} x \cdot \sqrt[3]{1 - x} dx$

8. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}$

9. $\int\limits_{1}^{5} \frac{\sqrt{x - 1}}{x} dx$

10. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{16 - x^2}}$

11. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$

12. $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{(16 + x^2)^3}}$

13. $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$

14. $\int_{0}^{5/2}\frac{x^2dx}{\sqrt{25-x^2}}$

15. $\int_{0}^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$

16. $\int_{0}^{5}x^2\sqrt{25-x^2}dx$

17. $\int_{1}^{5}\frac{xdx}{\sqrt{5+4x}}$

18. $\int_{0}^{4}x^2\sqrt{16-x^2}dx$

19. $\int_{\ln 3}^{\ln 8}\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$

20. $\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$

21. $\int_{-5/3}^{1}\frac{\sqrt[3]{3x+5}+2}{\sqrt[3]{3x+5}}dx$

22. $\int_{0}^{1}\frac{x^4dx}{\sqrt{(2-x^2)^3}}$

23. $\int_{0}^{8}\frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$

24. $\int_{0}^{\sqrt{2}/2}\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

25. $\int_{2}^{9}\frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$

26. $\int_{0}^{\sqrt{5}/2}\frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$

27. $\int_{4}^{16}\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$

28. $\int_{0}^{5}\frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$

29. $\int_{0}^{\ln 5}\frac{\sqrt{e^x-1}}{1+3e^{-x}}dx$

30. $\int_{0}^{16}\sqrt{256-x^2}dx$

VIII. Встановити збіжність або розбіжність невласних інтегралів

1. $\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{arctg}x}{x}$.

2. $\int_{0}^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$.

3. $\int_{e}^{+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[5]{x^3}}$.

4. $\int_{1}^{e}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

5. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{2^{\sin x} dx}{\sqrt{x^3+2x+3}}$.

6. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

7. . $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{4x^6+7}}$

8. $\int\limits_{-2}^{0} \frac{(x+3)dx}{x^2+4x+4}$.

9. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\arccos\frac{1}{x}}{x^2+x+1}dx$.

10. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \frac{dx}{1-e^{-x}}$.

11. $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx$.

12. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{\arcsin x}}$.

13. $\int\limits_{1}^{+\infty} \arcsin\frac{1}{x}dx$.

14. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin x}$.

15. $\int \frac{\mathrm{arctg} x}{1+x^2}$.

16. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$.

17. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

18. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \mathrm{tg}^2 x dx$.

19. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{2-\sin x}{\sqrt{2x^3+3}}dx$.

20. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}dx}{1-\cos x}$.

21. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

22. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt[3]{x}}{\mathrm{arctg} x}dx$.

23. $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

24. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{\arcsin x}}{x}dx$.

25. . $\int\limits_{1}^{+\infty} \arcsin^2\frac{1}{x}dx$

26. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\ln(1+\sqrt{x})}$.

27. $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

28. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x^5}$.

29. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{3x^3+2}}$

30. $\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^2 x dx$.

IX. Обчислити площу плоскої фігури, яка обмежена лініями, що задані рівняннями (x, y – декартові координати, ρ, φ – полярні координати, t – параметр)

1. $\rho = 2(1+\cos\varphi)$.
2. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$.
3. $y = 2x^2$, $y = x^3$.
4. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 6\sin t, \end{cases}$ $t \in [0;2\pi]$.
5. $2y = x^2$, $2x + 2y - 3 = 0$.
6. $y = x + 3$, $y = x^2 - 2x + 3$.
7. $\rho = 2\cos\varphi$.
8. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2$, $x \ge 2$.
9. $\rho = 5\sin\varphi$.
10. $y = x$, $y = \frac{x^3}{2}$.
11. $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$ $t \in [0;2\pi]$.
12. $y = x^2 - x$, $y = x^3$, $x = 1$.
13. $\rho = \cos 2\varphi$.
14. $\rho = 3\operatorname{tg}\varphi$, $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
15. $y = 2 - x^2$, $y = \sqrt[3]{x^2}$.
16. $y = x^2$, $y^2 = 8x$.
17. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$ $y = 4$, $y \ge 4$.
18. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$.
19. $\rho = \frac{1}{2} + \cos\varphi$.
20. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $t \in [0;2\pi]$.
21. $\rho = \sin\varphi$, $\rho = 2\sin\varphi$.
22. $y = x^2 - 7x + 4$, $y = x - 3$.
23. $y = \sin^2 x$, $y = 0$, $x \in [0;\pi]$.
24. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$ $t \in [0;2\pi]$, $y = 3$, $y \ge 3$.
25. $y = x^2 - 3x + 4$, $y = -x^2 + 9x - 6$.
26. $y = \ln(x-1)$, $y = 0$, $x = 1 + e$.

27. $y = x\sin x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \pi.$

28. $y = x^2 - x - 2, \quad y = -x^2 + 3x + 4.$

29. $y = 2e^x - 1, \quad y = e^{2x}, \quad x = 1.$

30. $y = x^2 + x - 8, \quad y = -x^2 - 5x.$

X. Обчислити довжину дуги кривої (x, y – декартові координати, ρ, φ – полярні координати, t – параметр)

1. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, \ 1 \le x \le 2.$

2. $\rho = 4e^{\frac{4\varphi}{3}}, \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}.$

3. $\rho = 3(1 - \cos\varphi).$

4. $y = \ln x, \ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}.$

5. $\rho = 2\varphi, \ 0 \le \varphi \le \frac{3}{4}.$

6. $y = -\ln\cos x, \ 0 \le x \le \frac{\pi}{6}.$

7. $\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t. \end{cases}$

8. $\rho = 6\sin\varphi, \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}.$

9. $\rho = 3(1 + \cos\varphi), \ -\pi \le \varphi \le -\frac{\pi}{2}.$

10. $y = \frac{1}{2}(1 - e^x - e^{-x}), \ 0 \le x \le 3.$

11. $\rho = 3\varphi, \ 0 \le \varphi \le \frac{4}{3}.$

12. $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$

13. $y = \ln(1 - x^2), \quad x \in \left[0; \frac{1}{2}\right].$

14. $y^2 = x^3, \quad x \in [0; 4].$

15. $\rho = 6(1 + \sin\varphi), \ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0.$

16. $y = \frac{x^2 - 1}{2}, \ x \in [-1, 1].$

17. $\rho = 3e^{\frac{3\varphi}{4}}, \ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$

18. $y = e^x + 6, \ \ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{15}.$

19. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right].$

20. $\rho = 4(1 - \sin\varphi), \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}.$

21. $\rho = \frac{1}{\cos\varphi}, \quad \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$

22. $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi]$

23. $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

24. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $t \in [0; \pi]$

25. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$, $0 \le x \le \frac{7}{9}$

26. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $t \in [0; \pi]$

27. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$

28. $\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t), \\ y = 8(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

29. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

30. $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos\sqrt{x}$, $0 \le x \le \frac{1}{4}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., Наука, 1975.
2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., Наука, 1984.
3. Виленкин Н. Я., Куницкая Е. С., Мордкович А. Г. Математический анализ. Интегральное исчисление. М., Просвещение, 1979.
4. Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в упражнениях и задачах, ч.1. М., Высшая школа, 1967.
5. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому аналізу. М., Наука, 1990.
6. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М., Высшая школа, 1966.
7. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа, ч. 1. М., Физматлит, 2005.
8. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа, т. 1. М., Высшая школа, 1981
9. Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. Математический анализ: Введение в анализ, производная, интеграл. Справочное пособие по высшей математике, т. 1. М., Едиториал УРСС, 2001.
10. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления, т. 1, М., Наука, 1976.
11. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. М., Физматлит, 2001.
12. Шкіль М. І. Математичний аналіз, ч. 1. К., Вища школа, 1978.

ЗМІСТ