

№1 b – кількість літер у прізвищі, c – кількість літер у імені.

а) Знайти функцію гармонічну всередині круга радіуса b и з центром в початку координат таку, що $u|_{\rho=b} = f(\varphi)$.

в) Знайти функцію гармонічну всередині кільця $\{(\rho, \varphi) | 1 \leq \rho \leq c, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ і таку,

що $u|_{\rho=1} = f(\varphi)$, $u|_{\rho=c} = g(\varphi)$.

1.	a) $f(\varphi) = 2 + 3\sin 2\varphi - \cos 4\varphi$; b) $f(\varphi) = 2 - \sin 4\varphi$, $g(\varphi) = 1 + \cos 3\varphi$.	2.	a) $f(\varphi) = \cos 2\varphi - \sin^2 \varphi$; b) $f(\varphi) = 3 - \cos \varphi - \sin \varphi$, $g(\varphi) = \sin 2\varphi$.
3.	a) $f(\varphi) = -3 + \sin^2 5\varphi - \cos 4\varphi$; b) $f(\varphi) = 3 - \cos 8\varphi$, $g(\varphi) = 1 - \sin \varphi$.	4.	a) $f(\varphi) = 3\cos 3\varphi - \sin 3$; b) $f(\varphi) = 1 - \cos 5\varphi$, $g(\varphi) = 5\sin 3\varphi - \cos 5\varphi$.
5.	a) $f(\varphi) = 2 - \cos \varphi + \sin 6\varphi$; b) $f(\varphi) = 3\cos 3\varphi - 2\sin \varphi$, $g(\varphi) = \sin 4\varphi$.	6.	a) $f(\varphi) = 2 - \cos 6\varphi + \sin 4$; b) $f(\varphi) = 2\sin 3\varphi$, $g(\varphi) = 6\sin 4\varphi - \cos 3\varphi$.
7.	a) $f(\varphi) = 3 - \cos 2\varphi + \sin 3\varphi$; b) $f(\varphi) = \cos \varphi - \sin 2\varphi$, $g(\varphi) = 1 - \sin 5\varphi$.	8.	a) $f(\varphi) = 4 - \cos 3\varphi + 2\sin \varphi$; b) $f(\varphi) = 1 - \sin 4\varphi$, $g(\varphi) = \sin 4 - \cos 3\varphi$.
9.	a) $f(\varphi) = \cos \varphi - \sin^2 4\varphi$; b) $f(\varphi) = 3 - 4\cos \varphi - \sin 5\varphi$, $g(\varphi) = \sin 2\varphi$.	10.	a) $f(\varphi) = -3 + 5\sin^2 \varphi - 2\cos 3\varphi$; b) $f(\varphi) = 3 - 6\cos \varphi$, $g(\varphi) = 3 - 4\sin \varphi$.
11.	a) $f(\varphi) = 3 + 2\sin 6\varphi + 6\cos \varphi$; b) $f(\varphi) = 5 - 2\sin 4\varphi$, $g(\varphi) = 4 + 3\cos 3\varphi$.	12.	a) $f(\varphi) = 3 + 4\cos 3\varphi - \sin 3\varphi$; b) $f(\varphi) = 3\cos 4\varphi$, $g(\varphi) = 4\sin 3\varphi - 7\cos 5\varphi$.
13.	a) $f(\varphi) = \sin^2 3\varphi - \cos \varphi$; b) $f(\varphi) = -3 - 2\cos 3\varphi$, $g(\varphi) = 4 - 2\sin 3\varphi$.	14.	a) $f(\varphi) = \sin^2 \varphi - 2\cos^2 3\varphi$; b) $f(\varphi) = 3 - 2\cos 3\varphi$, $g(\varphi) = 8 - 1\sin 5\varphi$.
15.	a) $f(\varphi) = 1 - 4\cos 3\varphi + 2\sin 4\varphi$; b) $f(\varphi) = 7\cos 5\varphi + 7\sin 4\varphi$, $g(\varphi) = 4\sin 4\varphi$.	16.	a) $f(\varphi) = 2 - 3\cos 4\varphi + 5\sin 6\varphi$; b) $f(\varphi) = 3 - \sin 2\varphi$, $g(\varphi) = \sin 4 - \cos 5\varphi$.
17.	a) $f(\varphi) = \cos 3\varphi - \sin^2 6\varphi$; b) $f(\varphi) = 13 - 4\cos 2\varphi - 3\sin 3\varphi$, $g(\varphi) = \sin 7\varphi$.	18.	a) $f(\varphi) = \cos 3\varphi - \sin^2 3\varphi$; b) $f(\varphi) = 4 - \cos 4\varphi + \sin 2\varphi$, $g(\varphi) = \sin 2\varphi$.
19.	a) $f(\varphi) = 3 + 3\sin 5\varphi - \cos 7\varphi$; b) $f(\varphi) = 2 - \sin 3\varphi$, $g(\varphi) = 1 + 5\cos 5\varphi$.	20.	a) $f(\varphi) = 2 - \cos 4\varphi + \sin 2\varphi$; b) $f(\varphi) = 3\cos 5\varphi - 12\sin 3\varphi$, $g(\varphi) = \sin 5\varphi$.

№2 Розв'язати методом відокремлення змінних неоднорідні задачі

1.	$\Delta u = x + y$, $0 < x < a$, $0 < y < b$, $u(0, y) = 0$, $u(a, y) = 0$, $u(x, 0) = 0$, $u(x, b) = 0$.	2.	$\Delta u = x - 1$, $0 < x < a$, $0 < y < b$, $u_x(0, y) = 0$, $u(a, y) = 0$, $u(x, 0) = 0$, $u(x, b) = 0$.
3.	$\Delta u = y + 4$, $0 < x < a$, $0 < y < b$, $u(0, y) = 0$, $u_x(a, y) = 0$, $u(x, 0) = 0$, $u(x, b) = 0$.	4.	$\Delta u = 2x + 1$, $0 < x < a$, $0 < y < b$, $u_x(0, y) = 0$, $u_x(a, y) = 0$, $u(x, 0) = 0$, $u(x, b) = 0$.
5.	$\Delta u = 3y + 2$, $0 < x < a$, $0 < y < b$, $u(0, y) = 0$, $u(a, y) = 0$, $u_y(x, 0) = 0$, $u(x, b) = 0$.	6.	$\Delta u = y + 5$, $0 < x < a$, $0 < y < b$, $u(0, y) = 0$, $u(a, y) = 0$, $u_y(x, 0) = 0$, $u_y(x, b) = 0$.
7.	$\Delta u = 8 - y$, $0 < x < a$, $0 < y < b$, $u_x(0, y) = 0$, $u_x(a, y) = 0$, $u_y(x, 0) = 0$, $u(x, b) = 0$.	8.	$\Delta u = 2x - 6$, $0 < x < a$, $0 < y < b$, $u(0, y) = 0$, $u_x(a, y) = 0$, $u_y(x, 0) = 0$, $u_y(x, b) = 0$.
9.	$\Delta u = 4x + 8$, $0 < x < a$, $0 < y < b$, $u_x(0, y) = 0$, $u(a, y) = 0$, $u_y(x, 0) = 0$, $u_y(x, b) = 0$.	10.	$\Delta u = 3 - 7y$, $0 < x < a$, $0 < y < b$, $u_x(0, y) = 0$, $u_x(a, y) = 0$, $u_y(x, 0) = 0$, $u_y(x, b) = 0$.
11.	$\Delta u = 5y - 3$, $0 < x < a$, $0 < y < b$, $u_x(0, y) = 0$, $u_x(a, y) = 0$, $u(x, 0) = 0$, $u_y(x, b) = 0$.	12.	$\Delta u = 9x - 2$, $0 < x < a$, $0 < y < b$, $u(0, y) = 0$, $u_x(a, y) = 0$, $u(x, 0) = 0$, $u_y(x, b) = 0$.

13.	$\Delta u = x + 7, 0 < x < a, 0 < y < b,$ $u(0, y) = 0, u_x(a, y) = 0,$ $u_y(x, 0) = 0, u(x, b) = 0.$	14.	$\Delta u = 2y + 5, 0 < x < a, 0 < y < b,$ $u_x(0, y) = 0, u(a, y) = 0,$ $u(x, 0) = 0, u_y(x, b) = 0.$
15.	$\Delta u = 5x - 4, 0 < x < a, 0 < y < b,$ $u_x(0, y) = 0, u(a, y) = 0,$ $u_y(x, 0) = 0, u(x, b) = 0.$	16.	$\Delta u = 4x + 3y, 0 < x < a, 0 < y < b,$ $u(0, y) = 0, u(a, y) = 0,$ $u(x, 0) = 0, u(x, b) = 0.$
17.	$\Delta u = 3y + 4, 0 < x < a, 0 < y < b,$ $u(0, y) = 0, u_x(a, y) = 0,$ $u(x, 0) = 0, u(x, b) = 0.$	18.	$\Delta u = 3x - 4, 0 < x < a, 0 < y < b,$ $u(0, y) = 0, u_x(a, y) = 0,$ $u_y(x, 0) = 0, u_y(x, b) = 0.$
19.	$\Delta u = 2 - 3y, 0 < x < a, 0 < y < b,$ $u_x(0, y) = 0, u_x(a, y) = 0,$ $u_y(x, 0) = 0, u(x, b) = 0.$	20.	$\Delta u = 3y + 1, 0 < x < a, 0 < y < b,$ $u(0, y) = 0, u(a, y) = 0,$ $u_y(x, 0) = 0, u_y(x, b) = 0.$

№3 Розв'язати крайову задачу Пуассона в кільці методом відокремлення змінних.

a – номер варіанта, b – кількість літер у прізвищі, c – кількість літер у імені.	$\Delta u = \frac{a(x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad 1 < x^2 + y^2 < b^2;$ $u _{x^2 + y^2 = 1} = c + ax;$ $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} _{x^2 + y^2 = b^2} = by^2.$
---	--

№4 Виписати розв'язок задачі Діріхле

$$\begin{cases} \Delta u = f(x, y, z), & (x, y, z) \in D \\ u|_{\partial D} = \varphi(x, y, z). \end{cases}$$

у відповідних областях.

1. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 2, z \in \mathbb{R}\}$

11. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0, x > 3, y \in \mathbb{R}\}$

2. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < -1, y > 0, z \in \mathbb{R}\}$

12. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0, x > -2, y \in \mathbb{R}\}$

3. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 1, y < 0, z \in \mathbb{R}\}$

13. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 1, y > 0, x \in \mathbb{R}\}$

4. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 2, y > 0, z \in \mathbb{R}\}$

14. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0, y > -1, x \in \mathbb{R}\}$

5. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y < -2, z \in \mathbb{R}\}$

15. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 3, y < 0, x \in \mathbb{R}\}$

6. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < -3, y < 0, z \in \mathbb{R}\}$

16. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0, y < -2, x \in \mathbb{R}\}$

7. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > -2, x > 0, y \in \mathbb{R}\}$

17. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > -4, z \in \mathbb{R}\}$

8. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0, x > 1, y \in \mathbb{R}\}$

18. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 4, y < 0, z \in \mathbb{R}\}$

9. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 1, x > 0, y \in \mathbb{R}\}$

19. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0, x > 4, y \in \mathbb{R}\}$

10. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < -1, x < 0, y \in \mathbb{R}\}$

20. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < -4, x < 0, y \in \mathbb{R}\}$

№5 Виписати розв'язок задачі Неймана

$$\begin{cases} \Delta u = f(x, y), & (x, y) \in D \\ \left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial D} = \varphi(x, y). \end{cases}$$

у відповідних областях.

1. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > -1, y > 3\}$

9. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > -1, y < 2\}$

2. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 2, y > -2\}$

10. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 3, y < 1\}$

3. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 3, y > 1\}$

11. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > -4, y < -1\}$

4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > -2, y > 1\}$

12. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 2, y < -2\}$

5. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 2, y > 1\}$

13. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 3, y < 1\}$

6. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -2, y > -3\}$

14. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -1, y < -3\}$

7. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 4, y > 1\}$

15. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -1, y < 4\}$

8. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 2, y > -1\}$

16. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 4, y < -3\}$

17. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > -2, y > 5\}$

19. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > -5, y < 3\}$

18. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 5, y > 2\}$

20. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -4, y < 2\}$

№6 Розв'язати задачу про радіальні коливання мембрани з використанням спеціальних функцій.

a – номер варіанта,
b – кількість літер у
прізвищі,
c – кількість літер у
імені.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2(u_{xx} + u_{yy}), & x^2 + y^2 < b^2, \\ u(x, y, 0) &= c^2(b^2 - (x^2 + y^2)), \\ u_t(x, y, 0) &= 0, \\ u(x, y, t)|_{x^2 + y^2 = b^2} &= 0 \end{aligned}$$

№7 Розв'язати операційним методом.

1.
 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
 $u(x, 0) = 3 \sin \frac{\pi x}{2l}, \quad u_t(x, 0) = -\sin \frac{3\pi x}{2l}, \quad 0 \leq x \leq l,$
 $u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, \quad t \geq 0.$

2.
 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
 $u(x, 0) = \cos \frac{\pi x}{2l}, \quad u_t(x, 0) = -2 \cos \frac{3\pi x}{2l}, \quad 0 \leq x \leq l,$
 $u_x(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0.$

3.
 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
 $u(x, 0) = 2 \sin \frac{2\pi x}{l}, \quad u_t(x, 0) = -5 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l,$
 $u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0.$

4.
 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
 $u(x, 0) = -\cos \frac{\pi x}{l}, \quad u_t(x, 0) = 5 \cos \frac{2\pi x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l,$
 $u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, \quad t \geq 0.$

5.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = -2 \sin \frac{5\pi x}{2l}, \quad u_t(x,0) = 5 \sin \frac{\pi x}{2l}, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

7.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = -3 \sin \frac{5\pi x}{l}, \quad u_t(x,0) = \sin \frac{\pi x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

9.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = -3 \sin \frac{3\pi x}{2l}, \quad u_t(x,0) = \sin \frac{5\pi x}{2l}, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

11.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = -3 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad u_t(x,0) = -4 \sin \frac{5\pi x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

13.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = -3 \sin \frac{7\pi x}{2l}, \quad u_t(x,0) = -\sin \frac{\pi x}{2l}, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

15.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = 6 \cos \frac{2\pi x}{l}, \quad u_t(x,0) = 2 \cos \frac{4\pi x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

17.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = -4 \sin \frac{3\pi x}{l}, \quad u_t(x,0) = \sin \frac{\pi x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

19.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = -9 \cos \frac{3\pi x}{2l}, \quad u_t(x,0) = \cos \frac{\pi x}{2l}, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

6.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = -\cos \frac{3\pi x}{2l}, \quad u_t(x,0) = -\cos \frac{5\pi x}{2l}, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

8.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = -\cos \frac{3\pi x}{l}, \quad u_t(x,0) = -3 \cos \frac{\pi x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

10.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = 3 \cos \frac{\pi x}{2l}, \quad u_t(x,0) = 2 \cos \frac{5\pi x}{2l}, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

12.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = -3 \cos \frac{2\pi x}{l}, \quad u_t(x,0) = 5 \cos \frac{\pi x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

14.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = 4 \cos \frac{3\pi x}{2l}, \quad u_t(x,0) = -5 \cos \frac{5\pi x}{2l}, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

16.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = -8 \sin \frac{5\pi x}{2l}, \quad u_t(x,0) = 9 \sin \frac{\pi x}{2l}, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

18.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = 3 \sin \frac{5\pi x}{2l}, \quad u_t(x,0) = -\sin \frac{5\pi x}{2l}, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

20.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = 4 \cos \frac{\pi x}{l}, \quad u_t(x,0) = -2 \cos \frac{3\pi x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t \geq 0.$$